

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

L'EFFETTO UNRUH
E IL CONCETTO DI PARTICELLA
IN TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

Relatore:

Prof. SEBASTIANO SONEGO

Laureando:

NICOLA DAL CIN

ANNO ACCADEMICO 2020-2021

Abstract

In this work, we aim to present a rigorous treatment of a quantum scalar field applying the results to describe the Unruh effect.

After recalling elementary notions of Hamiltonian and quantum mechanics, we introduce the space of states of a quantum field defining the so-called *Fock space*. In addition, we discuss the choice of a set of positive frequency solutions, its relation with spacetime symmetries, and how different sets are linked by *Bogoliubov transformations*. Then we recall some features of the *Rindler Space*, and a precise definition of *particle detector*, which allows us to treat the quantization of a scalar field from the point of view of both inertial and accelerated observers.

The Unruh effect, indeed, describes how a uniformly accelerated particle detector, moving in a scalar field in the inertial vacuum state, “feels” itself as in a thermal bath of many particles with temperature proportional to its acceleration. The importance of this result is due to the way it highlights some ambiguities in the notion of particle in quantum field theory. Moreover it is tightly bond with the phenomenon of Hawking radiation by black holes, suggesting a deep connection among quantum physics, general relativity and thermodynamics.

Introduzione

La teoria quantistica dei campi è la formulazione su cui si basa il *Modello Standard*, che al momento è il migliore modello che la fisica abbia prodotto per descrivere, attraverso le interazioni fondamentali, i fenomeni microscopici.

In questa teoria le quantità fondamentali sono appunto *campi*, che matematicamente sono distribuzioni a valori operatoriali sullo spaziotempo o una sua regione, mentre le particelle sono entità derivate e vengono definite come *stati eccitati* o *quanti* del campo quantistico associato (e.g. il fotone è il quanto del campo elettromagnetico). Questo cambio di prospettiva rispetto alla meccanica quantistica, in cui le entità fondamentali sono particelle puntiformi (sebbene descritte in modo assai differente da ciò che si fa in meccanica classica, attraverso un vettore di stato in uno spazio di Hilbert), fu necessario per estendere la teoria al caso relativistico.

Dopo aver introdotto alcune nozioni di meccanica quantistica, nel secondo capitolo tratteremo in modo rigoroso la quantizzazione di un campo scalare; quest'ultimo, pur permettendo di percorrere una trattazione completa ed esplicativa, non richiede di introdurre ulteriori complicazioni (come ad esempio lo spin) e perciò in tutto l'elaborato ci concentreremo su tale caso specifico. In particolare, vedremo come cercando di descrivere sistemi con un numero variabile di particelle bosoniche — prerequisite fondamentale per una qualsiasi teoria quantistica relativistica — si arrivi a definire lo *spazio di Fock* degli stati di un campo quantistico, di cui gli stati “*a singola particella*” e il *vuoto quantistico* fanno parte. Vedremo che per dare questa descrizione sarà necessario selezionare un insieme completo di *modi* in cui scomporre, sfruttando la teoria spettrale richiamata nell'appendice, il campo; in particolare ciascuna eccitazione (identificata con una particella) sarà relativa ad un determinato modo e le possibili scelte di questo insieme, legate alle simmetrie dello spazio in cui si lavora, non sono univocamente determinate ed equivalenti.

Il problema della scelta dell'insieme di modi in cui rappresentare i vari campi è anche una delle ragioni che impediscono al modello standard di includere il campo gravitazionale nella sua formulazione. Matematicamente, se si cerca di quantizzare un campo in uno spaziotempo generico (una qualsiasi soluzione dell'equazione di Einstein) si riscontra una mancanza di simmetrie, o più precisamente di campi vettoriali di Killing, rispetto ai quali definire i modi a *frequenza positiva*. Un caso particolare a cui è possibile estendere la teoria quantistica dei campi è quello degli spazitempi *statici* [1]; nel capitolo tre accenneremo quindi alla quantizzazione di un campo scalare in questo contesto, restringendoci poi allo spaziotempo di Minkowski, più che sufficiente per i nostri scopi.

Nel resto dell'elaborato, infatti, ci concentreremo sull'*effetto Unruh* secondo cui un rivelatore di particelle, muovendosi con accelerazione propria costante in presenza

di un campo nello stato di vuoto (rispetto ad un osservatore inerziale), osserva lo stato del campo come se contenesse “più particelle” con temperatura proporzionale alla sua accelerazione propria. Questo sorprendente risultato teorico è di grande importanza in quanto da un lato fa emergere i problemi interpretativi legati al fatto che il concetto di particella in teoria quantistica dei campi dipende dalla scelta dei *modi* in cui il campo relativo è espresso, mentre dall’altro evidenzia l’esistenza di una profonda relazione fra termodinamica, meccanica quantistica e relatività generale. Sebbene l’effetto sia stato scoperto da S. A. Fulling nel 1973 [2], esso venne ricavato in maniera alternativa da W. Unruh nel 1976 [3] proprio mentre studiava il fenomeno della radiazione di Hawking prodotta dai buchi neri, teorizzato anch’esso in quegli anni [4]. Il motivo per cui l’effetto Unruh è strettamente legato a quanto scoperto da Hawking è che un osservatore accelerato vede un orizzonte degli eventi nel suo spaziotempo, che si dimostra essere un modello semplificato ma analogo a quello in presenza di un buco nero, come vedremo nel quarto capitolo in cui richiameremo alcuni risultati di Relatività Ristretta sullo *Spazio di Rindler* [5].

Nel quinto ed ultimo capitolo ci occuperemo finalmente dell’effetto Unruh. Inizieremo definendo più precisamente cosa si intende per *rivelatore di particelle* ed in particolare esporremo il modello ideato da Unruh e DeWitt. Percorreremo poi due differenti derivazioni dell’effetto studiato: con la prima, studieremo lo spettro di assorbimento del rivelatore; vedremo in seguito com’è possibile costruire, attraverso una scelta di soluzioni a frequenza positiva “solidale” col rivelatore, una quantizzazione rispetto a cui lo stato di vuoto inerziale è un bagno termico di particelle.

Indice

1	Fondamenti di meccanica hamiltoniana e quantistica	3
1.1	Formalismo hamiltoniano	3
1.2	Meccanica quantistica	6
1.2.1	Visuale di Heisenberg	8
1.2.2	Visuale di Schrödinger	9
1.3	L'oscillatore armonico quantistico	10
2	Quantizzazione di un campo scalare statico	13
2.1	Equazioni ellittiche	13
2.1.1	Soluzioni a frequenza positiva	14
2.2	Spazio di Fock	17
2.2.1	Operatori di creazione e distruzione	18
2.3	Seconda quantizzazione dell'hamiltoniana	21
2.4	Operatori di campo	21
2.4.1	Operatori di creazione e distruzione nello spazio delle posizioni	21
2.4.2	Scelta della rappresentazione	23
2.5	Funzioni a due punti	23
2.5.1	Funzioni di Green	23
2.5.2	Funzioni a due punti di un campo quantistico	27
3	Quantizzazione di un campo scalare di Klein–Gordon	29
3.1	Campo scalare	29
3.2	Spaziotempo di Minkowski	31
3.2.1	Quantizzazione	31
3.2.2	Tensore energia-momento-sforzi e Hamiltoniana	32
3.3	Simmetrie	34
3.4	Trasformazioni di Bogoliubov	34
4	Spazio di Rindler	37
4.1	Moto iperbolico	37
4.2	Coordinate di Rindler	40
4.3	Altri sistemi di coordinate in $\mathcal{R}$	41
4.3.1	Coordinate di Lass	41
4.3.2	Orizzonti di Rindler	42

5	Effetto Unruh	45
5.1	Il rivelatore di Unruh–DeWitt	45
5.2	Rivelatori di particelle	48
5.3	Comportamento di un rivelatore accelerato nello spaziotempo di Min- kowski	49
5.3.1	Calcolo dello spettro d’assorbimento di un rivelatore unifor- memente accelerato	49
5.3.2	Interpretazione fisica dell’effetto Unruh	51
5.4	Un diverso approccio: il vuoto di Fulling	52
5.4.1	I modi di Rindler	52
5.4.2	Il vuoto di Fulling	55
5.4.3	Calcolo dei coefficienti di Bogoliubov	56
5.5	Buchi neri	59
5.5.1	Spaziotempo di Kruskal	59
5.5.2	Teoria quantistica dei campi nello spaziotempo di un buco nero	61
5.5.3	Accenno alla radiazione di Hawking	63
6	Conclusioni	65
A	Teoria spettrale	67
A.1	Operatori ellittici, hermitiani e autoaggiunti	67
A.2	Teorema Spettrale	68
	Bibliografia	73

Notazioni

Riassumiamo qui alcune notazioni e convenzioni che adotteremo nell'elaborato.

- Per i tensori sarà utilizzata la notazione con *indice astratto* per cui rimandiamo ad esempio al [6];
- con $\oplus$ si indicherà la somma diretta fra spazi, mentre con $\otimes$ il prodotto tensoriale fra tensori o spazi di Hilbert e $\odot$ il prodotto tensoriale simmetrizzato;
- con ∇ e ∇^2 indicheremo, rispettivamente, il gradiente e il laplaciano calcolati rispetto alle coordinate spaziali;
- la derivata totale di una funzione f rispetto al tempo sarà invece scritta sia come $\frac{df}{dt}$ che con $\dot{f}$;
- i trivettori saranno scritti in grassetto, mentre la loro norma euclidea in semplice minuscolo (e.g. $k = \|\mathbf{k}\|$ con $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$). Faremo uso della medesima notazione in altri casi eccezionali (come quello dei vettori bidimensionali di coordinate trasverse $\mathbf{k}_\perp := (k_y, k_z)$), tuttavia essa non sarà ambigua in quanto sempre specificata nel contesto;
- la distribuzione delta di Dirac n -dimensionale verrà sempre indicata con $\delta^{(n)}$;
- gli operatori quantistici saranno sempre indicati da un apice $\hat{\bullet}$, per distinguerli dai relativi osservabili (qualora ci siano). Gli altri operatori fra spazi di Hilbert saranno invece rappresentati inequivocabilmente da lettere maiuscole.

Salvo quando specificato, supporremo di lavorare con unità fisiche naturali per cui

$$c = \hbar = G = 1, \tag{0.1}$$

dove c è il modulo della velocità della luce, $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ (con h la costante di Planck) e G la costante di gravitazione universale.

Capitolo 1

Fondamenti di meccanica hamiltoniana e quantistica

La formulazione della teoria quantistica dei campi scalari che andremo a costruire è basata su quella relativa a sistemi quantistici soddisfacenti equazioni del moto lineari: oscillatori armonici.

L'unica sostanziale differenza fra un campo lineare (i.e. che non interagisce con se stesso) e una collezione di oscillatori armonici è che il primo è un sistema con infiniti gradi di libertà. Prima di dedicarci allo studio di campi quantistici conviene però richiamare qualche concetto di meccanica hamiltoniana classica e meccanica quantistica, in particolare ci soffermeremo sull'esempio istruttivo dell'oscillatore armonico quantistico.

Tengo però a precisare che quest'esposizione ha un fine prettamente introduttivo, volto a fissare alcune notazioni e non mira a nulla più di questo — per ulteriori approfondimenti sulla meccanica classica si rimanda ai riferimenti [7] e [8], mentre per quella quantistica si veda [9].

1.1 Formalismo hamiltoniano

Consideriamo un sistema classico con un numero finito di gradi di libertà. Siano $q^1, \dots, q^m$ le “coordinate generalizzate” definibili, almeno localmente, nello spazio delle configurazioni $\mathcal{S}$, che ricordiamo essere una varietà differenziabile m -dimensionale.

La dinamica del sistema si può descrivere definendo una funzione Lagrangiana $L : T\mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la quale si rappresenta localmente in funzione delle coordinate generalizzate come $L(q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m; t)$, e postulando il seguente

Assioma Fisico 1. (Principio di Hamilton) Tra tutte le possibili evoluzioni $q : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ di un sistema meccanico di cui si assumono fissate le posizioni al tempo t_1 e t_2 in $\mathcal{S}$, il moto reale è quello che rende stazionario il *funzionale d'azione*:

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^1(t), \dots, q^m(t); \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^m(t); t). \quad (1.1)$$

Questa ipotesi è equivalente a richiedere che la Lagrangiana del sistema soddisfi l'insieme di equazioni di *Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0, \quad a = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

Si definiscono poi i *momenti canonici coniugati* alle q^a come

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \quad (1.3)$$

Esempio 1.1.1. Se consideriamo un oscillatore armonico (in una dimensione) di massa m e frequenza ω la sua lagrangiana è data da

$$L = m \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (1.4)$$

Osserviamo quindi che la dinamica del sistema è descritta dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dq^a}{dt} = v^a \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} \end{cases} \quad a = 1, \dots, m \quad (1.5)$$

la cui soluzione è appunto una curva parametrizzata rispetto al tempo t in $T\mathcal{S}$.

A prima impressione la (1.5) presenta il problema di non essere “simmetrica” nelle variabili q e v . Questo può essere risolto qualora le (1.3) possano essere invertite scrivendo $\dot{q}^a = f^a(q, p, t)$ per opportune funzioni f^a . In tal caso si può definire infatti

$$H(q, p, t) := p_a f^a(q, p, t) - L(q, f(q, p, t), t), \quad (1.6)$$

la *funzione Hamiltoniana* del sistema (più rigorosamente, essa è la trasformata di Legendre di L , vedi [7]). Le (1.2) sono perciò equivalenti alle *equazioni di Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \\ \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \end{cases} \quad i = a, \dots, m. \quad (1.7)$$

I vantaggi di questa riformulazione sono molto più profondi della semplice “simmetria” fra le variabili: da un lato essa permette di descrivere più sistemi fisici (ad esempio particelle relativistiche con massa nulla) e in secondo luogo permette una formulazione geometrica della dinamica di un sistema. Infatti, osservando che i momenti generalizzati p_a sono componenti di 1-forme $p_a dq^a$ nello spazio cotangente a $\mathcal{S}$, possiamo considerare l'Hamiltoniana come un'applicazione $H : T^*\mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — dove $T^*\mathcal{S}$ è detto *spazio delle fasi del sistema*.

La cosa più sorprendente è la struttura geometrica che le equazioni di Hamilton evidenziano nello spazio delle fasi. Per coglierla scriviamole nella forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^m \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p_1 \\ \vdots \\ \partial H / \partial p_m \\ -\partial H / \partial q^1 \\ \vdots \\ -\partial H / \partial q^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial q^1 \\ \vdots \\ \partial H / \partial q^m \\ \partial H / \partial p_1 \\ \vdots \\ \partial H / \partial p_m \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Quest'ultima si può riformulare più sinteticamente introducendo $2m$ coordinate x^α nello spazio $T^*\mathcal{S}$, con $x^\alpha = q^\alpha$ per $1 \leq \alpha \leq m$ e $x^\alpha = p_{\alpha-m}$ per $m < \alpha \leq 2m$, e la *matrice simplettica* Ω , in componenti

$$\Omega^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Le equazioni di Hamilton sono allora

$$\dot{x}^\alpha = -\Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x^\beta}. \quad (1.10)$$

Osservazione 1.1.2. È chiaro che la forma della matrice simplettica dipende fortemente dalla scelta di coordinate adottata. Per una generica trasformazione nello spazio delle fasi $x^\alpha \mapsto \bar{x}^\alpha$ la ‘nuova’ matrice simplettica

$$\bar{\omega}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\delta} \Omega^{\gamma\delta} \quad (1.11)$$

è diversa da Ω e proprio per questo motivo la indicheremo in generale con la lettera minuscola.

Le trasformazioni che lasciano invariata la struttura della matrice simplettica, sono dette trasformazioni *canoniche* così come anche le nuove coordinate $\bar{x}^\alpha$.

Osservazione 1.1.3. Lo spazio cotangente di una varietà è una *varietà simplettica*, ovvero una varietà con dimensione pari in cui è assegnato un campo di 2-forme chiuse e non degeneri (cosa che nel nostro caso è possibile definire grazie ad $\Omega_{\alpha\beta}$). A questo punto il teorema di Darboux garantisce la possibilità di trovare coordinate canoniche in qualsiasi varietà simplettica [7].

Definizione 1.1.4. Nel formalismo Hamiltoniano che stiamo descrivendo uno *stato puro* del sistema classico è un punto nello spazio delle fasi $T^*\mathcal{S}$. Mentre un *osservabile* F è una funzione scalare sullo spazio delle fasi.

La struttura simplettica permette di dotare l'insieme $\mathcal{O}$ degli osservabili di un sistema di una struttura algebrica; grazie ad essa è possibile infatti definire in ciascun punto della varietà un isomorfismo tra vettori e 1-forme. Poiché a ciascuna funzione scalare su $T^*\mathcal{S}$ è possibile associare un campo di covettori (il differenziale), si può definire, mediante la struttura simplettica, una corrispondenza tra osservabili e specifici campi vettoriali su $T^*\mathcal{S}$.

Definizione 1.1.5. Se $F : T^*\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile, definiamo il *campo vettoriale hamiltoniano* associato a F come

$$\tilde{F}^\alpha = -\omega^{\alpha\beta} \partial_\beta F. \quad (1.12)$$

Esempio 1.1.6. In questi termini geometrici, richiedere che un sistema soddisfi le equazioni di Hamilton è equivalente, nel caso autonomo (e.g. sistema isolato), a postulare che i moti dinamicamente ammissibili nello spazio delle fasi siano quelli corrispondenti a curve integrali di $\tilde{H}^\alpha$ in $T^*\mathcal{S}$, i.e. che $\dot{x}^\alpha = \tilde{H}^\alpha$.

L'insieme degli osservabili $\mathcal{O}$ è quindi dotato della struttura di algebra di Lie, grazie alla

Definizione 1.1.7. La *parentesi di Poisson* di due funzioni differenziabili $F, G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ è l'osservabile

$$\{F, G\} := \omega(\tilde{F}, \tilde{G}), \quad (1.13)$$

in coordinate $\{F, G\} = -\omega^{\alpha\beta} \partial_\alpha F \partial_\beta G$.

L'operazione appena definita è chiaramente antisimmetrica; inoltre essendo ω chiusa, è facile dimostrare che vale anche l'identità di Jacobi.

Le parentesi di Poisson devono la loro importanza alla possibilità di utilizzarle per descrivere l'evoluzione degli osservabili di un sistema hamiltoniano:

Teorema 1.1.8. *Si consideri un sistema classico con spazio delle fasi $T^*\mathcal{S}$ e un'hamiltoniana H che determina un flusso di fase $\Phi_t : T^*\mathcal{S} \rightarrow T^*\mathcal{S}$ tramite le (1.7). Definendo $F(t) := F(\Phi_t, x_0)$, dove F è un osservabile e $x_0 \in T^*\mathcal{S}$ fissato, allora*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \{F, H\} \Big|_{(\Phi_t, x_0)}. \quad (1.14)$$

Tuttavia come evidenzieremo in seguito, è possibile utilizzare le parentesi di Poisson anche per sviluppare un parallelismo tra il formalismo hamiltoniano classico e la meccanica quantistica (nella visuale di Heisenberg).

1.2 Meccanica quantistica

La meccanica quantistica è la teoria fisica che descrive il comportamento di un sistema microscopico ed è una teoria *probabilistica*: non basterà più conoscere una funzione scalare come l'hamiltoniana e lo stato iniziale per ricostruire in modo deterministico il moto successivo.

Questa profonda differenza di approccio rispetto alla meccanica classica si rispecchia in una formulazione matematica radicalmente diversa.

Assioma Fisico 2. Lo *stato puro* di un sistema quantistico è un elemento dello spazio proiettivo (rappresentato da un vettore normalizzato) di uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$, dotato di un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Notazione 1.2.1. Utilizzeremo la notazione di Dirac; gli stati sono quindi indicati come “vettori ket” $|\psi\rangle$ ed essi si distinguono dai vettori bra $\langle\phi| := \langle\phi, \cdot\rangle$ ossia (si veda il teorema di Riesz [10]) dalle 1-forme su $\mathcal{H}$. Il prodotto interno di due stati è invece indicato come $\langle\phi|\psi\rangle := \langle\phi, \psi\rangle$.

Osservazione 1.2.2. Il fatto che lo spazio degli stati di un sistema sia lineare, implica che la combinazione lineare a coefficienti complessi di due stati $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ rappresenta ancora uno stato quantistico del sistema (principio di sovrapposizione).

Un *osservabile* A è rappresentato da un operatore lineare hermitiano (o meglio autoaggiunto) in $\mathcal{H}$, che indicheremo con $\hat{A}$ (se si tratta di un operatore illimitato il suo dominio è un sottospazio denso in $\mathcal{H}$). Lavorando con una teoria probabilistica, non è possibile predire il valore di un osservabile quando questo viene misurato, è necessario perciò postulare anche la modalità di interpretazione dei risultati teorici.

Assioma Fisico 3. Nel caso che, in un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$, venga misurato A si postula che il valore di aspettazione del risultato sia

$$\langle A \rangle = \langle \psi, \hat{A}\psi \rangle =: \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.15)$$

Quest'assunzione pone l'accento sulla decomposizione spettrale degli operatori normali

$$\hat{A} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|, \quad (1.16)$$

dove $\{\psi_{\alpha}\}$ è un insieme completo di autostati (i.e. autofunzioni) normalizzati dell'operatore con rispettivo spettro $\text{spett}(\hat{A}) = \{\lambda_{\alpha}\}$ (per semplicità abbiamo supposto che questo sia discreto). Nel caso non degenere, ovvero quando l'autospazio relativo a ciascun autovalore è unidimensionale, assumiamo inoltre che:

- Una misura dell'osservabile A su un sistema nello stato $|\psi\rangle$ fornisca sempre come risultato uno degli autovalori di $\hat{A}$.
- La probabilità di trovare come risultato $\lambda_{\alpha} \in \text{spett}(\hat{A})$ è $|\langle \psi_{\alpha} | \psi \rangle|^2$.

Si osservi che lo stato è rappresentato da un vettore normalizzato, altrimenti bisognerebbe normalizzare quest'ultima dividendo per la norma di $|\psi\rangle$.

Il *commutatore* di due operatori è definito come

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (1.17)$$

mentre l'*anticommutatore* è

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (1.18)$$

Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ commutano, i.e. $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, allora qualsiasi sia lo stato iniziale del sistema la misurazione di A non influenza il risultato di quella di B e viceversa, A e B sono quindi detti *compatibili*. Inoltre è possibile dimostrare che le parentesi $[\cdot, \cdot]$ inducono una struttura di algebra di Lie sull'insieme degli osservabili quantistici, analogamente a quanto accade per le parentesi di Poisson e gli osservabili classici.

Vediamo ora come trattare la questione dell'evoluzione dello stato in un sistema quantistico; è possibile farlo seguendo diversi approcci equivalenti, quelli che menzioneremo sono la

- *Visuale di Heisenberg*: dove la dipendenza temporale è affidata agli operatori mentre lo stato iniziale non varia,
- *Visuale di Schrödinger*: in cui lo stato evolve nel tempo, ma non gli operatori.

1.2.1 Visuale di Heisenberg

Limitiamoci a trattare sistemi chiusi, in cui quindi non vi è una dipendenza esplicita dal tempo dovuta a fattori esterni.

In particolare consideriamo un sistema quantistico che possiede, nel caso classico, una dinamica descritta da equazioni differenziali autonome.

Assioma Fisico 4. Si assume che ci sia un operatore *hamiltoniano* autoaggiunto $\hat{H}$ tale che, per ogni osservabile A valga l'*equazione del moto di Heisenberg*¹

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{A}]. \quad (1.19)$$

Una piacevole conseguenza dell'aver supposto che $\hat{H}$ non dipenda esplicitamente dal tempo, è che le soluzioni della (1.19) possono essere scritte come

$$\hat{A}(t) = \hat{U}(t)^{-1} \hat{A}(0) \hat{U}(t), \quad (1.20)$$

dove $\hat{U}(t) := e^{-i\hat{H}t}$ è un operatore unitario, ossia

$$\hat{U}(t)^{-1} = \hat{U}(t)^\dagger = e^{i\hat{H}t}, \quad (1.21)$$

dove usiamo l'apice $\dagger$ per indicare il trasposto coniugato di un operatore.

Osservazione 1.2.3. Risulta evidente come la (1.19) abbia la stessa struttura di (1.14); l'ipotesi dell'equazione del moto di Heisenberg è infatti suggerita dall'analogia fra le parentesi di Poisson, che agiscono sugli osservabili classici, e quelle di commutazione per gli operatori quantistici.

La relazione si fa ancora più interessante se, facendo un passo indietro, si introduce la meccanica quantistica con la tecnica del *path-integral* di Feynman; in particolare si osserva che il formalismo classico di Hamilton-Jacobi è di fatto il limite classico della teoria dell'onda pilota di de Broglie e Bohm.

Sulla base di queste analogie, è quindi possibile iniziare lo studio postulando l'esistenza di un *principio di corrispondenza* fra meccanica classica e quantistica, realizzata dalla sostituzione

$$\{F, G\} \longleftrightarrow -i[\hat{F}, \hat{G}]. \quad (1.22)$$

Si osservi che in questo modo da (1.14) si ricava (1.19):

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \longleftrightarrow \frac{d\hat{A}}{dt} = -i[\hat{A}, \hat{H}] = i[\hat{H}, \hat{A}]. \quad (1.23)$$

In particolare si ottengono le relazioni fondamentali per gli operatori canonici²

$$[\hat{q}^a, \hat{q}^b] = [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0, \quad [\hat{q}^a, \hat{p}_b] = i\delta^a_b. \quad (1.24)$$

¹L'equazione (1.19) (così come (1.14)) può essere generalizzata nel caso non autonomo in cui $\partial_t \hat{H}$ e $\partial_t \hat{A}$ non sono zero, si veda per esempio [11] per il caso quantistico e [8] per quello classico.

²Qui come nell'intero elaborato ometteremo il simbolo di operatore per quello identicamente nullo e l'operatore identità, inoltre quest'ultimo verrà spesso sottinteso.

1.2.2 Visuale di Schrödinger

Accenniamo brevemente anche alla visuale di Schrödinger che storicamente fu la prima ad essere introdotta. Vedremo che essa, in ultima analisi, si rivela essere una trattazione che ripercorre quanto detto sopra, facendo però evolvere nel tempo gli stati (invece che gli operatori).

In meccanica quantistica gli oggetti fisicamente rilevanti sono i valori di aspettazione degli osservabili (1.15), in quanto mettono in relazione la teoria con i risultati sperimentali.

Supponiamo, lavorando in visuale di Heisenberg, di voler calcolare il valore di aspettazione dell'osservabile A , in un sistema autonomo nello stato $|\psi\rangle$ al tempo t ; questo è

$$\langle A(t) \rangle = \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{U}(t)^\dagger \hat{A}(0) \hat{U}(t) | \psi \rangle \quad (1.25)$$

$$= \langle \psi(t) | \hat{A}(0) | \psi(t) \rangle, \quad (1.26)$$

avendo posto

$$|\psi(t)\rangle := \hat{U}(t)|\psi\rangle. \quad (1.27)$$

Da un punto di vista fisico è dunque perfettamente equivalente lavorare con una teoria in cui l'evoluzione temporale è contenuta negli stati $|\psi(t)\rangle$ — quella di Schrödinger — piuttosto che negli operatori come nella visuale di Heisenberg, poiché le predizioni che si producono sono le stesse.

In visuale di Schrödinger l'equazione del moto degli stati, che si dimostra essere equivalente alla (1.19), è l'*equazione di Schrödinger*:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1.28)$$

Quest'ultima non è la forma più consueta per l'equazione di Schrödinger. Spesso infatti si usa sviluppare gli stati nello spazio delle posizioni, scrivendoli quindi per mezzo delle *funzioni d'onda*.

Osservazione 1.2.4. Gli autostati della posizione, definito $\hat{\mathbf{x}}$ l'operatore della posizione, sono gli stati $|\mathbf{y}\rangle$ che soddisfano

$$\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.29)$$

Questi tuttavia sono più che altro un'astrazione matematica, non è possibile ottenere un singolo valore misurando la posizione di una particella (cosa che invece accade misurando altri osservabili come lo spin). Infatti gli autostati della posizione non sono nemmeno normalizzabili, avendo valori continui possiamo richiedere al massimo la condizione

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.30)$$

dove $\delta^{(3)}$ è la delta di Dirac in $\mathbb{R}^3$. Tuttavia è possibile continuare a considerare gli stati fisici come sovrapposizione di autostati di posizione:

$$|\psi(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi(t, \mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle, \quad (1.31)$$

dove abbiamo introdotto la *funzione d'onda* $\psi(t, \mathbf{x}) := \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$ che descrive il sistema nello stato $|\psi(t)\rangle$.

Se supponiamo quindi l'hamiltoniana nella forma

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + \hat{V}(\mathbf{x}) \quad (1.32)$$

possiamo scrivere l'equazione di Schrödinger (1.28) nella base della posizione ritrovando la consueta

$$i\frac{\partial\psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(t, \mathbf{x}) + \hat{V}(\mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x}). \quad (1.33)$$

Osservazione 1.2.5. In quest'ultima abbiamo usato il fatto che, nella base della posizione, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla/m$. Mentre per l'operatore di posizione vale

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \langle \psi(t, \mathbf{x}) | \hat{\mathbf{x}} | \psi(t, \mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\psi^*(t, \mathbf{x}) [\mathbf{x}] \psi(t, \mathbf{x}) \right), \quad (1.34)$$

per quello del momento si calcola³

$$\langle \mathbf{p} \rangle = m \frac{d\langle \mathbf{x} \rangle}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\psi^*(t, \mathbf{x}) \left[-\frac{i}{m} \nabla \right] \psi(t, \mathbf{x}) \right). \quad (1.35)$$

1.3 L'oscillatore armonico quantistico

Dedichiamo l'ultima sezione del capitolo a presentare brevemente un esempio fondamentale di sistema quantistico: l'*oscillatore armonico*.

Consideriamo il caso unidimensionale in cui una particella quantistica è soggetta ad una forza elastica, con hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (1.36)$$

dove ω è la frequenza angolare dell'oscillatore. Sebbene sia possibile risolvere con il solito metodo della separazione delle variabili l'equazione di Schrödinger risultante, è più istruttivo nel nostro caso lavorare in visuale di Heisenberg. In tal caso per trovare gli autovalori di $\hat{H}$ si può procedere introducendo (come fece per primo Paul Dirac) l'operatore

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{\omega}}{2} \left(\hat{x} + \frac{i}{\omega} \hat{p}_x \right). \quad (1.37)$$

Si osservi che $\hat{a}$ non è autoaggiunto e non è quindi un operatore associato ad un osservabile. Dalla relazione di commutazione “canonica”

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i, \quad (1.38)$$

si mostra, facendo qualche calcolo, che

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega}{2}. \quad (1.39)$$

Introduciamo a questo punto un secondo operatore

$$\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.40)$$

³Per approfondimenti rimandiamo al [9].

per cui si dimostra la proprietà

$$\hat{N}\hat{a} = \hat{a}(\hat{N} - 1), \quad \hat{N}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + 1). \quad (1.41)$$

Sia $|n\rangle$, con $n \in \mathbb{R}$, un autostato normalizzato di $\hat{N}$ relativo all'autovalore n , i.e. $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, allora

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n - 1)\hat{a}|n\rangle, \quad \hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (1.42)$$

In altri termini $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ sono, se non nulli, autostati di $\hat{N}$. Notiamo poi che la norma di $\hat{a}|n\rangle$ è

$$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n\langle n|n\rangle \quad \text{perciò} \quad n \geq 0. \quad (1.43)$$

Inoltre, da quanto osservato e dalla (1.41) si dimostra per induzione (usando $\hat{a}|0\rangle = 0$ come passo base) che n dev'essere un intero non negativo. L'azione di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ sugli autostati di $\hat{N}$ è

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle, \quad (1.44)$$

ed essi sono perciò rispettivamente detti operatore di *distruzione* e *creazione*. Dalla (1.39) segue che gli autovalori dell'hamiltoniana sono dunque

$$E_n = (n + 1/2)\omega; \quad (1.45)$$

il vettore $|0\rangle$ è quindi l'autostato con energia minima (che è $\omega/2 \neq 0$ non nulla!) ed è perciò chiamato *stato fondamentale*.

Osservazione 1.3.1. Lo stato fondamentale $|0\rangle$ non va confuso con il vettore nullo $\mathbf{0}$ dello spazio degli stati $\mathcal{H}$, quest'ultimo non corrisponde nemmeno a uno stato quantistico del sistema.

Applicando iterativamente l'operatore di creazione allo stato fondamentale è possibile costruire tutti gli autostati dell'hamiltoniana; per induzione si dimostra che

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (1.46)$$

dove il coefficiente $(n!)^{-1/2}$ emerge dall'aver definito gli $|n\rangle$ normalizzati.

Riassumendo, con questo procedimento si costruisce un sottospazio di Hilbert (la chiusura dello spazio generato dalla base ortonormale $\{|n\rangle\}_n$) in cui gli operatori $\hat{x}$, $\hat{p}_x$ e $\hat{H}$ agiscono e sono regolati dalle solite relazioni di commutazione. Ciascuno di questi, essendo un operatore autoaggiunto, possiede una rappresentazione spettrale: ad esempio nella base delle posizioni, in cui $\hat{x}$ agisce diagonalmente, lo stato $|n\rangle$ è rappresentato dalla funzione $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$, che coincide con la soluzione dell'equazione di Schrödinger ricavabile con la separazione delle variabili.

Il metodo presentato invece, si concentra sulla rappresentazione spettrale di $\hat{H}$ che è chiaramente diagonale; gli stati $|n\rangle$ possono essere interpretati come stati in cui sono presenti n *quanti* (intesi come eccitazioni). In questo senso, gli operatori non osservabili $\hat{N}$, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ rispettivamente *contano*, *creano* e *distrucono* queste eccitazioni.

Vedremo nei successivi capitoli che questa costruzione è alla base del modo in cui si introduce il concetto di particella nella teoria quantistica dei campi: *le particelle sono semplicemente eccitazioni (globali) del campo*.

Capitolo 2

Quantizzazione di un campo scalare statico

I motivi per cui la meccanica quantistica non è la “teoria perfetta” a cui aspiriamo sono evidenti: essa non è relativistica e non può descrivere processi in cui varia il numero di particelle coinvolte. In un certo senso questi problemi sono lo stesso problema, infatti il principio relativistico di equivalenza fra massa e energia rende possibile la creazione e distruzione di particelle. L’esempio dell’elettromagnetismo, in cui la quantità fondamentale è un campo e non una particella, suggerisce un cambio di paradigma che in un certo senso risolve i problemi precedenti: infatti i sistemi relativistici (e quantistici) con un numero variabile di particelle sono ben descrivibili attraverso le proprietà di un *campo*.

In teoria quantistica dei campi (specialmente per trattare casi in uno spaziotempo curvo) si sceglie quindi di definire dei campi come entità di partenza e sviluppare una teoria in cui il concetto di particella (quando possibile) viene definito successivamente. Questo però non è il primo approccio che fu seguito storicamente: inizialmente si cercò di definire delle equazioni analoghe a quella di Schrödinger per particelle relativistiche, accorgendosi successivamente di essere partiti da ipotesi scomode.

Nel successivo capitolo accenneremo al tentativo fatto nel caso di particelle prive di spin, in questo invece descriveremo la quantizzazione dei campi che sono soluzioni di una generica equazione ellittica — facendo uso della teoria introdotta nell’appendice A.

2.1 Equazioni ellittiche

Abbiamo detto che in questa sezione daremo una descrizione, da un punto di vista matematico, della quantizzazione di determinati campi, ma che cosa si intende per “quantizzazione di un campo”? Da un punto di vista intuitivo (e un po’ semplicistico) quello a cui si mira in teoria quantistica dei campi è introdurre un nuovo osservabile, ossia il numero di particelle in un particolare stato del sistema (vedi sopra). A questo osservabile, volendo attenersi ai dettami della meccanica quantistica, dovrà corrispondere un operatore; in particolare sarà utile introdurne due: uno che “crei le particelle” ed uno che le distrugga.

Volendo perciò semplificare al massimo, l’idea di quel che faremo è

- 1) scrivere un campo ϕ come la trasformazione spettrale di un insieme di autofunzioni (modi) dell'operatore ellittico che determina l'equazione soddisfatta da ϕ (vedi (2.1)),
- 2) rendere possibile la creazione e distruzione di particelle, della frequenza (energia) di un certo modo, promuovendo (in un certo senso) i coefficienti della trasformazione a operatori.

Consideriamo quindi l'equazione

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K\phi, \quad (2.1)$$

dove supponiamo che $K = K(x)$ sia un operatore differenziale ellittico del secondo ordine definito su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e che K , con eventuali opportune condizioni al contorno, definisca su $L^2_\rho(\Omega)$ un operatore autoaggiunto e strettamente positivo (i.e. $\langle \psi, K\psi \rangle \geq C > 0$ per ogni ψ normalizzato).

Anche qui come nell'appendice trattiamo la teoria su un dominio euclideo, è possibile tuttavia sviluppare quanto segue anche su varietà differenziali, nel cui caso quello che vedremo costituisce la rappresentazione in una certa carta coordinata.

Osservazione 2.1.1. Interpretando (2.1) come l'equazione d'onda per una singola particella, l'indipendenza di K dal tempo non permette la possibilità di creazione di particelle e quindi preclude questa ipotesi.

Un caso particolare di (2.1) sul quale ci soffermeremo in seguito nell'elaborato, è l'equazione del moto di un campo scalare libero in $\mathbb{R}^n$: nel caso

$$K = -\nabla^2 + m^2 \quad (2.2)$$

si ha infatti la cosiddetta *equazione di Klein–Gordon*.

2.1.1 Soluzioni a frequenza positiva

La teoria spettrale generale richiamata nell'appendice A ci permette di esprimere la soluzione generale di (2.1) come

$$\phi(t, \cdot) = \cos(t\sqrt{K})f + \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}g, \quad (2.3)$$

dove

$$f(x) = \phi(0, x), \quad g(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x). \quad (2.4)$$

Nel nostro caso è naturale e comodo imporre che f, g e $\phi(t, \cdot)$ siano in $L^2_\rho := L^2_{\mu_\rho}$, caso in cui il teorema spettrale si applica direttamente.

Esempio 2.1.2. La soluzione (2.3) copre un caso molto generale, così come la trattazione in questo capitolo. Tuttavia per i nostri scopi sarà sufficiente restringerci poi all'equazione di Klein–Gordon

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.5)$$

la quale è possiede soluzioni della forma

$$u_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad \text{con} \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.6)$$

Torniamo al caso generale, supponiamo che K sia *reale* e che perciò anche la complessa coniugata di una soluzione sia ancora soluzione. Useremo inoltre le seguenti ipotesi e convenzioni per lo sviluppo in autofunzioni di K :

- i) Introduciamo un “indice” j per etichettare i modi, i.e. le autofunzioni indipendenti. In tal modo la trasformata spettrale diventa

$$\phi(j) := \int_{\Omega} \psi_j(x)^* [U\phi](x) \rho(x) d^n x, \quad (2.7)$$

dove ψ_j sono le autofunzioni di autovalore λ_j , cioè $K\psi_j = \lambda_j\psi_j$.

- ii) Supponiamo che le ψ_j siano scelte ortogonali, cosicché la formula di inversione assume la sua forma semplificata:

$$[U\phi](x) = \int \phi(j) \psi_j(x) d\mu(j). \quad (2.8)$$

In tal caso lo spazio delle rappresentazioni spettrali, denotato con $\int^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda}$, si riduce a L_{μ}^2 .

- iii) Definiamo

$$\tilde{f}(j) := [U^{-1}f](j) = \int_{\Omega} \psi_j(x)^* f(x) \rho(x) d^n x \quad (2.9)$$

e

$$\omega_j := \sqrt{\lambda_j} \in \sigma(\sqrt{K}). \quad (2.10)$$

Si osservi che avendo preso K definito positivo si ha $\omega_j > 0$ per ogni j e l'operatore $K^{-1/2}$ è sempre ben definito.

- iv) Sarà utile, infine, supporre per semplicità

$$\psi_j(x)^* = \psi_{j'}(x), \quad (2.11)$$

per qualche j' (diverso da j) nell'insieme degli indici.

Con queste premesse, la soluzione (2.3) diventa

$$\phi(t, x) = \int d\mu(j) \left[\tilde{f}(j) \psi_j(x) \cos(\omega_j t) + \tilde{g}(j) \psi_j(x) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} \right]. \quad (2.12)$$

Possiamo anche scrivere la soluzione generale a valori complessi

$$\phi(t, x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \left[\tilde{\phi}_+(j) \psi_j(x) e^{-i\omega_j t} + \tilde{\phi}_-(j) \psi_j(x)^* e^{+i\omega_j t} \right], \quad (2.13)$$

avendo posto

$$\tilde{\phi}_+(j) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\omega_j} \tilde{f}(j) + \frac{i}{\sqrt{\omega_j}} \tilde{g}(j) \right], \quad \tilde{\phi}_-(j) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\omega_j} \tilde{f}(j') - \frac{i}{\sqrt{\omega_j}} \tilde{g}(j') \right]. \quad (2.14)$$

Assioma Fisico 5. Lo spazio di Hilbert di tutti gli stati quantistici di una singola particella, nella teoria determinata dall'equazione d'onda relativistica (2.1), è lo spazio delle funzioni della forma

$$\phi(t, x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \tilde{\phi}_+(j) \psi_j(x) e^{-i\omega_j t}, \quad (2.15)$$

con $\tilde{\phi}_+ \in L_\mu^2$. Si noti che il prodotto interno su questi stati è indotto da quello di L_μ^2 :

$$\|\phi\|^2 = \|\tilde{\phi}_+\|_\mu^2 := \int |\tilde{\phi}_+(j)|^2 d\mu(j). \quad (2.16)$$

Definizione 2.1.3. Le soluzioni (2.15) sono dette *soluzioni a frequenza positiva* di (2.1), mentre

$$\phi(t, x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \tilde{\phi}_-(j) \psi_j(x)^* e^{+i\omega_j t}, \quad (2.17)$$

sono dette *soluzioni a frequenza negativa*.

Si noti che se K fosse un operatore relativo a un osservabile, allora (2.16) permetterebbe di definire la densità di probabilità di misurare l'osservabile come $|\tilde{\phi}_+(j)|^2$.

Esempio 2.1.4. Nel caso di un campo scalare libero si può prendere $j = \mathbf{k}$ o altrimenti $j = (|\mathbf{p}|, l, m)$ con $\omega_j = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ l'energia, l il momento angolare e m la massa delle particelle associate al campo. Questo giustifica come mai questi siano osservabili “puri” nella teoria di Klein–Gordon, a differenza di altri come la posizione.

Ricaviamo ora invece il prodotto interno indotto sulle funzioni di tipo (2.15) attraverso (2.16); invertendo (2.15) si ha

$$\frac{\tilde{\phi}_+(j)}{\sqrt{2\omega_j}} = U^{-1}[\phi(t, \cdot)] = \int_\Omega \phi(t, x) \psi_j(x)^* \rho dx. \quad (2.18)$$

Analogamente invertendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -i \int d\mu(j) \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \tilde{\phi}_+(j) \psi_j(x) e^{-i\omega_j t} \quad (2.19)$$

si ricava

$$\sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \tilde{\phi}_+(j) = iU^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = i \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \psi_j(x)^* \rho dx. \quad (2.20)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &= \|\tilde{\phi}_+\|_\mu^2 = 2 \int d\mu(j) \frac{\tilde{\phi}_+(j)^*}{\sqrt{2\omega_j}} \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \tilde{\phi}_+(j) \\ &= 2i \int d\mu(j) \int_\Omega \phi(t, x)^* \psi_j(x) \rho dx \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) \psi_j(y)^* \rho dy. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizzando ora la relazione di completezza per le autofunzioni

$$\int d\mu(j) \psi_j(x) \psi_j(y) = \frac{\delta(x-y)}{\rho(x)}, \quad (2.22)$$

e — grazie al fatto che $\phi, \partial_t \phi \in L^2_\rho$ — l'uguaglianza di Parseval, si ottiene infine

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &= 2i \int_\Omega \int_\Omega \phi(t, x)^* \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) \rho \delta(x-y) dx dy \\ &= 2i \int_\Omega \phi(t, x)^* \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) \rho dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Quest'ultima è di solito scritta in una forma più simmetrica

$$\|\phi\|^2 = i \int_\Omega \left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^* \phi \right] \rho dx =: i \int \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi \rho dx, \quad (2.24)$$

e detta *norma di Klein-Gordon*.

2.2 Spazio di Fock

Ora che abbiamo definito lo spazio degli stati per una singola particella, volendo descrivere sistemi in cui il numero di particelle è anch'esso un osservabile, non ci resta che definire lo spazio degli stati di due particelle, etc...

Per far questo sarà necessario utilizzare il concetto di *prodotto tensoriale* di spazi vettoriali e di Hilbert, il quale per questo contesto è ben trattato in [12]. Nel nostro caso, dato che gli spazi che ci interessano sono L^2 , daremo una definizione operativa sfruttando la seguente proprietà (vedi [13]):

Proposizione 2.2.1. *Siano dati A e B due spazi di misura; allora il prodotto tensoriale di $L^2(A)$ e $L^2(B)$ è*

$$L^2(A) \otimes L^2(B) := L^2(A \times B), \quad (2.25)$$

lo spazio delle funzioni quadrato sommabili $\phi(x, y)$, $x \in A$ e $y \in B$.

Nel caso lo spazio di misura sia lo stesso, un prodotto tensoriale iterato verrà indicato con la seguente notazione

$$\overbrace{L^2(A) \otimes \cdots \otimes L^2(A)}^n =: L^2(A)^{\otimes n}. \quad (2.26)$$

Dato che lo stato di una particella è descritto da una funzione $\tilde{\phi}_+ \in L^2_\mu$, si è tentati di rappresentare quello di *due* particelle con la funzione $\tilde{\phi}(j_1, j_2) \in L^2_\mu \otimes L^2_\mu$, tale che $|\tilde{\phi}(j_1, j_2)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la prima particella nello stato j_1 e la seconda in j_2 .

Tale costruzione, però, non tiene conto del fatto che due particelle bosoniche dello stesso tipo (e.g. come quelle del campo scalare) sono fra loro indistinguibili e bisogna perciò richiedere che $\tilde{\phi}(j_1, j_2) = \tilde{\phi}(j_2, j_1)$. L'insieme degli stati di due particelle è perciò il sottoinsieme delle funzioni simmetriche di $L^2_\mu \otimes L^2_\mu$, i.e. il *prodotto tensoriale simmetrizzato* $L^2_\mu \odot L^2_\mu =: (L^2_\mu)^{\odot 2}$. Più in generale, affermiamo che

Assioma Fisico 6. Lo spazio di Hilbert contenente gli stati di n particelle bosoniche è il *sottospazio totalmente simmetrico* $(L_\mu^2)^{\odot n} \subseteq (L_\mu^2)^{\otimes n}$, ovvero quello formato dalle funzioni $\tilde{\phi}(j_1, \dots, j_n)$ il cui valore è costante per ogni permutazione dei suoi argomenti.

Le funzioni totalmente simmetriche descrivono le particelle che obbediscono alla cosiddetta *statistica di Bose*: i *bosoni*; analogamente le funzioni d'onda totalmente antisimmetriche sono associate alle particelle, o meglio ai campi, detti *fermionici*.

La consistenza della teoria quantistica dei campi impone che i campi con spin intero, come quelli scalari e tensoriali, obbediscano alla statistica di Bose, mentre quelli con spin semi-intero a quella di Fermi.

Come anticipato qualche sezione sopra, stiamo cercando di sviluppare un formalismo in cui il numero di particelle in gioco sia esso stesso un osservabile. Il generico stato del nostro sistema risulterà quindi una combinazione dei possibili stati a n particelle, ciascuno appartenente a un $(L_\mu^2)^{\odot n}$ per un certo $n \in \{0, 1, \dots\}$. Definiamo quindi l'opportuno spazio atto a contenere la collezione degli stati così formata:

Definizione 2.2.2. Sia

$$\mathcal{F}_0 := \mathbb{C} \oplus L_\mu^2 \oplus (L_\mu^2)^{\odot 2} \oplus (L_\mu^2)^{\odot 3} \oplus \dots; \quad (2.27)$$

si dice *spazio di Fock* $\mathcal{F} := \overline{\mathcal{F}_0}$, ovvero il completamento dello spazio di Hilbert $\mathcal{F}_0$.

Gli elementi di $\mathcal{F}$ sono perciò successioni

$$\tilde{\Phi} = \{\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1(j), \tilde{\phi}_2(j_1, j_2), \dots, \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n), \dots\}, \quad (2.28)$$

tali che $\tilde{\phi}_n \in (L_\mu^2)^{\odot n}$ e $\|\tilde{\Phi}\|^2 := \sum_n \|\tilde{\phi}_n\|^2 < +\infty$.

Definizione 2.2.3. Il vettore $|0\rangle := \{1, 0, 0, \dots\}$ rappresenta lo stato con nessuna particella e corrisponde perciò a quello che intuitivamente chiameremo *vuoto*.

Si osservi che lo spazio di Fock è dipendente dai modi ψ_j e perciò anche il vettore $|0\rangle$ lo sarà. Nei successivi capitoli evidenzieremo che la scelta dell'insieme $\{\psi_j\}$ non è univoca e ciò permette l'esistenza di costruzioni non equivalenti. In particolare vedremo l'esempio di alcune situazioni fisiche in cui diversi osservatori, adottando diverse scelte, descrivono la stessa situazione fisica in modi differenti.

2.2.1 Operatori di creazione e distruzione

Per poter dire di essere riusciti nell'intento di aggiungere il numero di particelle di un sistema all'insieme degli osservabili, dobbiamo definire un operatore associato a tale numero.

Per far questo, sarà prima utile introdurre degli operatori — analoghi a quelli visti per l'oscillatore armonico — che permettano di aggiungere o rimuovere una particella, relativa ad un determinato modo $\tilde{u} \in L_\mu^2$, dal novero di quelle che compongono lo stato $\tilde{\Phi}$ del sistema. Definiamo quindi

$$\hat{a}(\tilde{u})\tilde{\Phi} := \left\{ \dots, \sqrt{n+1} \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \tilde{\phi}_{n+1}(j, j_1, \dots, j_n), \dots \right\}, \quad (2.29)$$

e

$$\hat{a}^\dagger(\tilde{u})\tilde{\Phi} := \left\{ 0, \tilde{u}(j_1)\tilde{\phi}_0, \dots, \sqrt{n} \operatorname{sym} \left[\tilde{u}(j) \tilde{\phi}_{n-1}(j_2, \dots, j_n) \right], \dots \right\}, \quad (2.30)$$

dove “sym” è l’operazione di simmetrizzazione di una funzione sui suoi argomenti j_i . Si osservi che (2.29) e (2.30) introducono degli operatori illimitati, dunque le sequenze a secondo membro non sempre sono elementi di $\mathcal{F}$. Tuttavia, poiché $\hat{a}(\tilde{u})$ e $\hat{a}^\dagger(\tilde{u})$ hanno $\mathcal{F}_0$ come comune dominio *invariante*, se $\tilde{\Phi} \in \mathcal{F}_0$ ciò vale anche per le sue rispettive immagini.

Come anticipato l’analogia con l’oscillatore armonico quantistico è molto stretta; per mostrarlo calcoliamo il commutatore fra $\hat{a}(\tilde{u})$ e $\hat{a}^\dagger(\tilde{v})$, con $\tilde{u}, \tilde{v} \in L_\mu^2$:

$$\hat{a}^\dagger(\tilde{v})\hat{a}(\tilde{u})\tilde{\Phi} = \left\{ \dots, \sqrt{n} \operatorname{sym} \left[\tilde{v}(j_0) \sqrt{n} \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \tilde{\phi}_n(j, j_2, \dots, j_n) \right], \dots \right\}, \quad (2.31)$$

$$\hat{a}(\tilde{u})\hat{a}^\dagger(\tilde{v})\tilde{\Phi} = \left\{ \dots, \sqrt{n+1} \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \sqrt{n+1} \operatorname{sym}_{j, j_1, \dots, j_n} \left[\tilde{v}(j) \tilde{\phi}(j_1, \dots, j_n) \right], \dots \right\} \quad (2.32)$$

$$= \left\{ \dots, \langle \tilde{u}^*, \tilde{v} \rangle_\mu \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n) + \sqrt{n} \operatorname{sym} \left[\tilde{v}(j_0) \sqrt{n} \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \tilde{\phi}_n(j, j_2, \dots, j_n) \right], \dots \right\}. \quad (2.33)$$

Dunque

$$[\hat{a}(\tilde{u}), \hat{a}^\dagger(\tilde{v})] = \langle \tilde{u}^*, \tilde{v} \rangle_\mu; \quad (2.34)$$

in particolare se $\tilde{u}$ è normalizzato si ha $[\hat{a}(\tilde{u}), \hat{a}^\dagger(\tilde{u})] = 1$.

Osservazione 2.2.4. Vediamo perciò che $\hat{a}(\tilde{u})$ e $\hat{a}^\dagger(\tilde{u})$ agiscono proprio come l’operatore di distruzione e creazione per un oscillatore armonico! In questo caso la sola differenza è che a ciascun modo del campo è associata una coppia di operatori. Quindi, dal punto di vista quantistico, un campo scalare è assimilabile a una collezione infinita di oscillatori armonici indipendenti, dato che $[\hat{a}(\tilde{u}), \hat{a}(\tilde{v})] = 0$ e $\langle \tilde{u}^*, \tilde{v} \rangle_\mu = 0$ implica $[\hat{a}(\tilde{u}), \hat{a}^\dagger(\tilde{v})] = 0$.

Come anticipato, analogamente a quanto visto nel primo capitolo, è possibile ora introdurre l’operatore $\hat{a}^\dagger(\tilde{u})\hat{a}(\tilde{u}^*)$ che rappresenta appunto il numero di particelle nello stato $\tilde{u}$; si noti da (2.31) come quest’ultimo agisca prendendo la parte di ciascun $\tilde{\phi}_n$ che contiene $\tilde{u}$ moltiplicandola per n .

Consideriamo adesso $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$, una base ortonormale di L_μ^2 , non necessariamente formata da autofunzioni di K . Allora $\{e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}\} := \{e_{\alpha_1}(j_1) \dots e_{\alpha_n}(j_n)\}$ forma una base ortonormale di $(L_\mu^2)^{\otimes n}$ e le simmetrizzazioni di questi vettori, $\{e_{\alpha_1} \odot \dots \odot e_{\alpha_n}\}$, un insieme che genera $(L_\mu^2)^{\odot n}$ e da cui si ottiene (come sottoinsieme) una base ortogonale di $(L_\mu^2)^{\odot n}$. Infine, al variare di n , si ha una base ortogonale dello spazio di Fock $\mathcal{F}$.

- Se l’operatore K in (2.1) ha **spettro discreto**, possiamo scegliere $\alpha := j$ e $e_\alpha := \psi_j$. Il singolo modo si può scrivere come

$$\tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} \quad (2.35)$$

e denotando $\hat{a}_j := \hat{a}(j)$ le relazioni di commutazione sono

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0. \quad (2.36)$$

In questo caso lo stato di *vuoto* è quello che soddisfa

$$\hat{a}_j|0\rangle = 0, \quad \text{per ogni } j. \quad (2.37)$$

Inoltre la configurazione contenente n particelle, i.e. $\hat{a}_{j_1} \cdots \hat{a}_{j_n}|0\rangle$, è proporzionale a $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}$ e usando la (2.30) si dimostra:

$$\hat{a}_{j_1} \cdots \hat{a}_{j_n}|0\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} n_j! e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}, \quad (2.38)$$

dove n_j è il *numero di occupazione* dello stato ψ_j , i.e il numero di indici con valore j in $\{j_1, \dots, j_n\}$. Con un po' di combinatoria si mostra infine che

$$\begin{aligned} \{0, 0, \dots, \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n), 0, \dots\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} \int d\mu(j_1) \cdots d\mu(j_n) \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n) \hat{a}_{j_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{j_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si noti che con questo metodo “ricorsivo” possiamo costruire tutto $\mathcal{F}_0$. Anche i generici operatori di creazione e distruzione possono essere ricavati in funzione degli $\hat{a}_j$:

$$\hat{a}^\dagger(\tilde{u}) = \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \hat{a}_j^\dagger, \quad \hat{a}(\tilde{u}) = \int d\mu(j) \tilde{u}(j) \hat{a}_j; \quad (2.40)$$

(chiaramente in questo caso gli integrali degenerano in sommatorie).

Infine, se le ψ_j sono reali, l'operatore che denota il numero di particelle nello stato ψ_j è $\hat{N}_j := \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$; mentre il numero totale di particelle è associato all'operatore

$$\hat{N} := \int d\mu(j) \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j. \quad (2.41)$$

In generale, l'osservabile ψ_j è $\hat{N}_j := \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ può essere visto come la densità (rispetto alla misura μ) di particelle nel punto j dello “spazio energia”.

- Nel caso K abbia **spettro continuo**, la validità di (2.38), (2.39) e (2.40) si mantiene se esse vengono considerate in senso *distribuzionale*. Gli oggetti $\hat{a}(\cdot)$ e $\hat{a}^\dagger(\cdot)$ sono infatti *distribuzioni a valori operatoriali*.

L'analogia della (2.36) è

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_\mu(j, k), \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0, \quad (2.42)$$

dove δ_μ è la delta di Dirac rispetto alla misura μ : $\int f(k) \delta_\mu(j, k) d\mu(k) = f(j)$.

In questo caso $\hat{N}$ può essere definito da

$$\hat{N} \tilde{\Phi} := \{\dots, n \tilde{\phi}(j_1, \dots, j_n), \dots\}. \quad (2.43)$$

2.3 Seconda quantizzazione dell'hamiltoniana

Ricordiamo che le funzioni in esame soddisfano $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sqrt{K} \phi$ (si veda anche l'osservazione 3.2.1 del prossimo capitolo) e perciò per le loro trasformate spettrali valgono

$$i \frac{\partial \tilde{\phi}(t, j)}{\partial t} = \omega_j \tilde{\phi}(t, j), \quad \tilde{\phi}(t, j) := \tilde{\phi}_+(j) e^{-i\omega_j t}. \quad (2.44)$$

Ne consegue che l'hamiltoniana per una singola particella è l'operatore $\sqrt{K}$ nello spazio delle posizioni e la moltiplicazione per ω_j in quello dell'energia, ovvero la rappresentazione spettrale di K . Dunque l'hamiltoniana di n particelle è

$$\tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n) \mapsto (\omega_{j_1} + \dots + \omega_{j_n}) \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n). \quad (2.45)$$

Facendo variare come al solito n concludiamo che l'hamiltoniana nello spazio di Fock è

$$\hat{H} := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \omega_{j_k} \right) \hat{P}_n, \quad (2.46)$$

dove $\hat{P}_n$ è l'operatore di proiezione nel sottospazio a n particelle. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\hat{H} \tilde{\Phi} := \left\{ \dots, \sum_{k=1}^n \omega_{j_k} \tilde{\phi}_n(j_1, \dots, j_n), \dots \right\}, \quad (2.47)$$

o

$$\hat{H} := \int d\mu(j) \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j. \quad (2.48)$$

2.4 Operatori di campo

Come anticipato, mostriamo che matematicamente un operatore di campo è una distribuzione; è necessario perciò introdurre un insieme di funzioni test. Per semplicità consideriamo l'insieme delle funzioni lisce a supporto compatto $C_0^\infty(\Omega)$.

Osservazione 2.4.1. Se $f \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $f \in \text{dom } K$ ed anche $f \in \text{dom } K^p$ per $0 \leq p \leq 1$. Inoltre, avendo supposto i coefficienti di K lisci, $C_0^\infty(\Omega)$ è un dominio invariante e $f \in \text{dom } K^p$ per ogni $p \geq 0$. Infine l'ulteriore assunzione che K sia strettamente positivo ci garantisce che $f \in \text{dom } K^p$ per ogni p .

2.4.1 Operatori di creazione e distruzione nello spazio delle posizioni

Nel caso non fosse già chiaro, va sottolineato come gli operatori di creazione e distruzione introdotti precedentemente siano relativi a modi nello spazio dei j . Tuttavia lo spazio delle posizioni x è quello fisicamente privilegiato, che quindi ci aspettiamo venga coinvolto nella descrizione di un campo quantistico.

Fissato $u \in L_\rho^2(\Omega)$ (e quindi $\tilde{u} \in L_\mu^2$) definiamo

$$\hat{a}^\dagger(u) := \hat{a}^\dagger(\tilde{u}), \quad \text{e} \quad \hat{a}(u) := [\hat{a}^\dagger(u^*)]^\dagger. \quad (2.49)$$

Ispirati da quanto detto sopra, diamo la seguente definizione che motiveremo con qualche successiva osservazione.

Definizione 2.4.2. Sia $f \in C_0^\infty(\Omega)$; definiamo l'operatore di campo

$$\hat{\phi}(t, f) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{a} \left(K^{-1/4} e^{-it\sqrt{K}} f \right) + \hat{a}^\dagger \left(K^{-1/4} e^{+it\sqrt{K}} f \right) \right]. \quad (2.50)$$

La derivata formale di (2.50) è

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt}(t, f) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[\hat{a} \left(K^{+1/4} e^{-it\sqrt{K}} f \right) - \hat{a}^\dagger \left(K^{+1/4} e^{+it\sqrt{K}} f \right) \right]. \quad (2.51)$$

Un'ulteriore derivazione mostra come $\hat{\phi}$ soddisfi (in senso distribuzionale) la (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{\phi}}{dt^2}(t, f) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{a} \left(K^{-1/4} e^{-it\sqrt{K}} (Kf) \right) + \hat{a}^\dagger \left(K^{-1/4} e^{+it\sqrt{K}} (Kf) \right) \right] \\ &= -\hat{\phi}(t, Kf) = -K\hat{\phi}(t, f), \end{aligned} \quad (2.52)$$

dove l'ultima uguaglianza vale poiché $K = K^\dagger$.

Nel caso in cui K abbia uno spettro discreto (cosa che potremmo sempre supporre trattando il caso di un campo scalare isolato, imponendo condizioni di periodicità) possiamo utilizzare la (2.40) per scrivere

$$\hat{\phi}(t, f) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \left[\hat{a}_j e^{-it\omega_j} \tilde{f}^*(j)^* + \hat{a}^\dagger e^{+it\omega_j} \tilde{f}(j) \right]. \quad (2.53)$$

Essendo $\tilde{f}(j) = \int_\Omega \rho dx \psi_j(x)^* f(x)$, ricordando l'ipotesi iv), possiamo scrivere

$$\tilde{f}^*(j)^* = \int_\Omega \rho dx \psi_j(x) f(x) = f(j'), \quad (2.54)$$

dove $j' \neq j$ è un altro elemento dell'insieme degli indici.

Invertendo $\hat{\phi}(t, f) = \int \rho dx \phi(t, x) f(x)$ e togliendo le funzioni test otteniamo infine

$$\hat{\phi}(t, x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \left[\hat{a}_j e^{-it\omega_j} \psi_j(x) + \hat{a}^\dagger e^{+it\omega_j} \psi_j(x)^* \right], \quad (2.55)$$

che è una versione decisamente più elegante, nonché più consueta, della (2.51).

Riassumendo quanto dimostrato, (2.55) corrisponde di fatto alla soluzione generale (2.13) della (2.1), in cui le funzioni (arbitrarie) $\tilde{\phi}_+(j)$ e $\tilde{\phi}_-(j)$ delle soluzioni classiche sono rimpiazzate dalle funzioni (o meglio distribuzioni) a valori operatoriali $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. In altre parole $\hat{\phi}(t, x)$ è una soluzione a valori operatoriali dell'equazione del moto, in perfetta analogia con quel che ci aspetteremmo dal fare teoria quantistica di campi in visuale di Heisenberg.

2.4.2 Scelta della rappresentazione

È chiaro a questo punto che la scelta dei modi in cui sviluppare il campo influenza la rappresentazione degli operatori e degli stati nello spazio di Fock.

Questo non dovrebbe sorprendere troppo un lettore familiare con l'algebra lineare: la base in cui rappresentiamo i vettori individua una scelta di coordinate che non influenza la loro natura geometrica. Effettivamente questa osservazione regge anche in meccanica quantistica; infatti, per il teorema di Von Neumann [14], in un sistema con un numero finito di gradi di libertà la scelta della rappresentazione non influenza i risultati di interesse fisico, poiché rappresentazioni irriducibili delle relazioni di commutazione canoniche sono unitariamente equivalenti.

Tuttavia il teorema di cui sopra *non* si generalizza nello spazio di Fock: due diverse scelte di modi possono dare luogo a rappresentazioni inequivalenti!

L'obiettivo di questo elaborato è quello di descrivere e interpretare alcuni risultati contraddittori che emergono studiando un campo scalare utilizzando rappresentazioni — legate da una *trasformazione di Bogoliubov* — inequivalenti (quella di un osservatore inerziale e di un osservatore rispettivamente uniformemente accelerato): l'effetto *Unruh*.

2.5 Funzioni a due punti

In questa sezione vogliamo esplicitare la relazione fra i valori di aspettazione dei prodotti di operatori di campo liberi, oggetti del tipo

$$\langle 0 | \hat{\phi}(t, x) \hat{\phi}(t', x') | 0 \rangle, \quad (2.56)$$

e nuclei integrali associati all'equazione d'onda classica $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + K\right)\phi = 0$. Per fare ciò ci sarà utile richiamare qualche concetto di analisi funzionale, in particolare le cosiddette funzioni di Green.

2.5.1 Funzioni di Green

Consideriamo un operatore differenziale $L = L(x)$ *lineare* che agisca sull'insieme delle distribuzioni su un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ad esempio il duale delle funzioni test $C_0^\infty(\Omega)$.

Definizione 2.5.1. Una *funzione di Green* $G(x; y)$ di L nel punto y è una qualsiasi soluzione di

$$L G(x, y) = \delta(x - y), \quad (2.57)$$

dove δ è la delta di Dirac.

Nel nostro caso l'operatore in questione sarà $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + K\right)$, definito in una regione dello spaziotempo di Minkowski $\mathcal{M}^4$. Cerchiamo quindi funzioni di Green dell'equazione

$$\left(\partial_t^2 + K\right)_{(\underline{x})} G(\underline{x}; \underline{x}') = \delta_\rho(\underline{x}, \underline{x}') := \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} \delta(t - t'), \quad (2.58)$$

dove $\underline{x} := (t, \mathbf{x})$ e $\underline{x}' := (t', \mathbf{x}')$ sono due punti di $\mathcal{M}^4$.

Osservazione 2.5.2. G è una distribuzione.

Facendo la trasformata formale di Fourier rispetto a t e quella spettrale rispetto a x si ottiene

$$\int e^{+i\omega t} dt \int \psi_j(x)^* \rho dx(\cdot). \quad (2.59)$$

La (2.58) diventa

$$(-\omega^2 + \omega_j^2) \tilde{G}(\omega, j, t; t', x') = \psi_j(x')^* e^{-i\omega t'}, \quad (2.60)$$

e perciò

$$\tilde{G} = \frac{\psi_j(x')^* e^{-i\omega t'}}{\omega_j^2 - \omega^2} + \text{termini con supporto in } \omega^2 = \omega_j^2. \quad (2.61)$$

Con la trasformazione inversa abbiamo infine

$$G(\underline{x}; \underline{x}') = -\frac{1}{2\pi} \int d\mu(j) \int d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega_j^2} e^{-i\omega(t-t')} \psi_j(x) \psi_j(x')^* \quad (2.62)$$

+ soluzione dell'equazione omogenea.

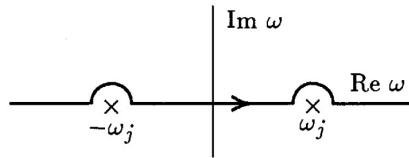
Cerchiamo di calcolare l'integrale fatto rispetto a ω ; è chiaro che esso non è definito ovunque avendo poli in $\omega = \pm\omega_j$. L'idea che è naturale a questo punto è quella di “spostare” i poli all'interno del piano complesso a una piccola distanza ϵ dall'asse reale e, fatto questo, usare il teorema di Cauchy.

Questo è corretto, tuttavia la non unicità con cui lo spostamento può essere portato a termine determina l'esistenza di diversi casi, a cui corrispondono funzioni di Green differenti.

Osservazione 2.5.3. Si noti che queste ultime differiscono per traslazione dall'equazione omogenea, perciò le diverse possibilità sono determinate dalle varie prescrizioni sui poli.

Vediamo quindi le più usate:

- 1) Consideriamo il caso in cui il contorno passi sopra i poli come in figura. Usando il Lemma di Jordan [15], quando $t < t'$ il bordo può essere chiuso nel semipiano superiore, dunque la funzione di Green che ne risulta è quella nulla, $G = 0$. Invece nel caso $t > t'$ il bordo dev'essere chiuso nel semipiano inferiore dando la cosiddetta *funzione di Green ritardata*:



$$G_R = \int d\mu(j) \frac{i}{2\omega_j} \left[e^{-i\omega_j(t-t')} - e^{+i\omega_j(t-t')} \right] \psi_j(x) \psi_j(x')^* \quad (2.63)$$

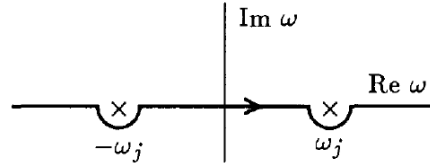
$$= \int \frac{d\mu(j)}{\omega_j} \sin \left[\omega_j(t-t') \right] \psi_j(x) \psi_j(x')^* \theta(t-t'), \quad (2.64)$$

dove

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi > 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.65)$$

- 2) Analogamente, il caso in cui il contorno passa sotto i poli dà luogo alla *funzione di Green avanzata*:

$$G_A = - \int \frac{d\mu(j)}{\omega_j} \sin[\omega_j(t - t')] \psi_j(x) \psi_j(x')^* \theta(t' - t). \quad (2.66)$$



- 3) La media fra G_A e G_R , intesa prendendo il valore principale di ciascun integrale divergente, è $\bar{G} := \frac{1}{2}(G_R + G_A)$.

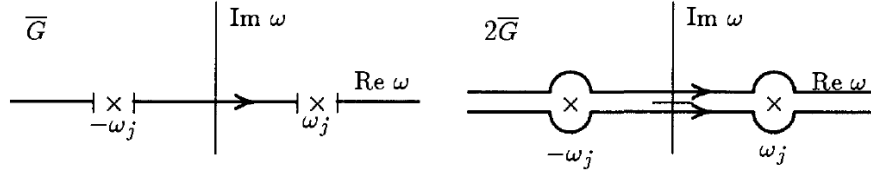
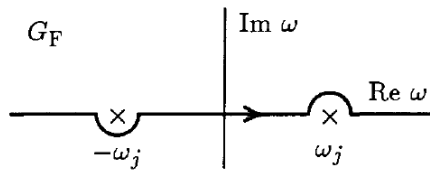


Figura 2.1: Parte principale di Cauchy dell'integrale.

- 4) Supponendo invece di passare sotto il polo di sinistra e sopra quello di destra si ottiene il *propagatore di Feynman*:

$$G_F(\underline{x}; \underline{x}') := - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int d\mu(j) \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - \omega_j^2 + i\epsilon} \psi_j(x) \psi_j(x')^*, \quad (2.67)$$

$$= i \int \frac{d\mu(j)}{2\omega_j} e^{-i\omega_j|t-t'|} \psi_j(x) \psi_j(x')^*. \quad (2.68)$$

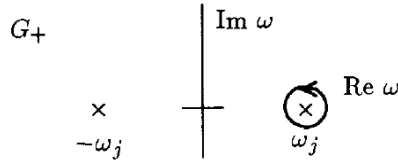


Osserviamo che la differenza fra due soluzioni di (2.58), ossia di due funzioni di Green, è una soluzione dell'equazione d'onda omogenea corrispondente; quest'ultima deriva, in ultima analisi, da un'integrazione lungo un circuito chiuso in ω :

- 5) Integrando lungo un cammino attorno al solo polo di destra si ottiene un contributo pari a $-iG_+$, dove

$$G_+(\underline{x}, \underline{x}') := \int \frac{d\mu(j)}{2\omega_j} e^{-i\omega_j(t-t')} \psi_j(x) \psi_j(x')^* \quad (2.69)$$

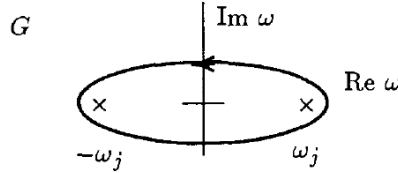
è la *funzione di Wightman*.



- 6) D'altro canto l'integrale attorno al polo sinistro si indica con $+iG_-$, dove $G_- = G_+^*$ per le proprietà della trasformata spettrale.
- 7) Percorrendo in senso antiorario un cammino che racchiude entrambi i poli, otteniamo la *funzione di Pauli-Jordan*

$$G := G_A - G_R = -i(G_+ - G_-) = 2 \Im(G_+). \quad (2.70)$$

Dunque G è la funzione avente come parte con frequenza positiva e negativa ri-

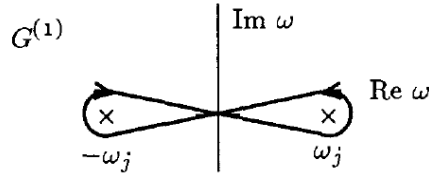


spettivamente G_+ e G_- e, per un motivo che sarà poi chiaro, è detto *commutatore*.

- 8) Un percorso come quello in figura, che passa in senso orario attorno a nodo di sinistra e antiorario in quello di destra, dà luogo alla funzione $-iG^{(1)}$, dove $G^{(1)}$ è la *funzione di Hadamard* (o *Schwinger*) definita come

$$G^{(1)} := G_+ + G_- = 2 \Re(G_+) = -2i(G_f - \bar{G}). \quad (2.71)$$

Osservazione 2.5.4. Le funzioni G_+ , G_- , $G^{(1)}$ e G_F dipendono in maniera sostanziale dalla trasformazione spettrale e dalla decomposizione in soluzioni a frequenza positiva/negativa. È invece possibile dimostrare che G_R , G_A , e quindi anche G e $\bar{G}$ possono essere caratterizzate dalle rispettive proprietà di supporto nello spaziotempo e indipendentemente dalla trasformazione spettrale. Sono queste quindi le funzioni “primitive” che possono essere usate ed estese anche nel caso di uno spaziotempo curvo.



Siamo ora pronti per vedere il collegamento tra le funzioni appena introdotte e i valori di aspettazione di operatori di campo liberi, cosa che sarà poi fondamentale nello studio dell'effetto Unruh.

2.5.2 Funzioni a due punti di un campo quantistico

Siano $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ due punti dello spaziotempo di Minkowski e $\hat{\phi}$ un campo scalare quantizzato come sopra. Ricordando la (2.42) possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}(\underline{x}) \hat{\phi}(\underline{x}') | 0 \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \hat{a}_j \psi_j(x) e^{-i\omega_j t} \int \frac{d\mu(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k^\dagger \psi_j(x)^* e^{-i\omega_k t'} | 0 \rangle \quad (2.72) \\ &= \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \psi_j(x) \psi_j(x')^* e^{-i\omega_j(t-t')} = G_+(\underline{x}; \underline{x}'). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che vale $G_-(\underline{x}; \underline{x}') = \langle 0 | \hat{\phi}(\underline{x}') \hat{\phi}(\underline{x}) | 0 \rangle$ e quindi

$$iG(\underline{x}, \underline{x}') = \langle 0 | [\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')] | 0 \rangle \quad \text{e} \quad G^{(1)}(\underline{x}, \underline{x}') = \langle 0 | \{\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')\} | 0 \rangle, \quad (2.73)$$

dove $\{\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')\}$ è l'*anticommutatore* degli operatori di campo.

Osserviamo ora che $[\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')]$ è un multiplo dell'operatore identità, dato che $[\hat{a}(f), \hat{a}^\dagger(g)]$ lo è (si veda (2.34) e si ricordi il fattore $\hbar$ che abbiamo imposto unitario). Dunque dalla (2.73), e dal fatto che $|0\rangle$ è un vettore normalizzato, abbiamo

$$[\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')] = iG(\underline{x}, \underline{x}'). \quad (2.74)$$

Con calcoli simili si ricavano espressioni analoghe anche per G_R , G_A e $\overline{G}$. È interessante, e vale la pena notare, che le funzioni di Green “privilegiate”, secondo l'osservazione 2.5.4, si rivelano essere valori di aspettazione di operatori che sono multipli dell'identità. Questo non accade per le altre funzioni di Green, ad esempio nel caso di G_F si dimostra:

$$\begin{aligned} G_F &= i\theta(t - t')G_+ + i\theta(t' - t)G_- \\ &= i\langle 0 | \mathcal{T}[\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.75)$$

dove $\mathcal{T}[\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')]$ è il *prodotto ordinato temporalmente*¹ dei due operatori, definito come

$$\mathcal{T}[\hat{\phi}(\underline{x}), \hat{\phi}(\underline{x}')] = \begin{cases} \hat{\phi}(\underline{x})\hat{\phi}(\underline{x}'), & \text{se } \underline{x} \text{ è nel futuro di } \underline{x}', \\ \hat{\phi}(\underline{x}')\hat{\phi}(\underline{x}), & \text{se } \underline{x} \text{ è nel passato di } \underline{x}'. \end{cases} \quad (2.76)$$

¹Questo emerge anche in calcoli perturbativi (vedi diagrammi di Feynman [16]).

Le altre funzioni di Green, come G_F , *dipendono dallo stato* $|0\rangle$ in cui sono calcolate. Sebbene esuli dagli scopi di questo elaborato, è interessante evidenziare che nel caso generale di uno spaziotempo curvo — in cui non c'è una scelta preferenziale di $|0\rangle$ — la “scelta di un vuoto” è equivalente a scegliere una particolare funzione di Green da definire come propagatore di Feynman G_F .

Capitolo 3

Quantizzazione di un campo scalare di Klein–Gordon

Da qui in poi ci restringeremo a lavorare con l'equazione di Klein–Gordon, ottenibile nel caso euclideo sostituendo $K = -\nabla^2 + m^2$ in (2.1).

Sebbene per i nostri scopi sia sufficiente trattare il caso di un campo scalare, libero e con massa nello spaziotempo di Minkowski, conviene partire con una trattazione più generale, che ci permetterà di introdurre alcune definizioni e osservazioni, che saranno interessanti in seguito.

In questa breve introduzione, volta ad inquadrare e contestualizzare lo studio, supporremo di lavorare in uno spaziotempo che sia una varietà $\mathcal{M}$ pseudo-riemanniana $(n+1)$ -dimensionale, liscia e globalmente iperbolica. Condizioni per le quali rimandiamo a [6] e ci garantiscono l'esistenza di appropriate equazioni differenziali con opportune condizioni al contorno.

3.1 Campo scalare

Consideriamo la densità di lagrangiana della forma

$$\mathcal{L}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{ab}(\underline{x})\nabla_a\phi(\underline{x})\nabla_b\phi(\underline{x}) - \left(m^2 - \xi R(\underline{x})\right)\phi^2(\underline{x})\right], \quad (3.1)$$

dove ϕ è il campo scalare con quanti di massa m , $\nabla_a\phi$ la sua derivata covariante (che coincide con quella parziale essendo ϕ scalare) e $\underline{x}$ un generico punto dello spaziotempo. Inoltre g_{ab} è una metrica con determinante $g < 0$, mentre $\xi R(\underline{x})\phi^2$ (in cui ξ è uno scalare costante e $R(\underline{x})$ è la curvatura scalare di Ricci) rappresenta un'ulteriore interazione tra il campo scalare e quello gravitazionale [1], [17].

L'azione associata a (3.1) è

$$S := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\underline{x}) d^{n+1}\underline{x} \quad (3.2)$$

e variando quest'ultima rispetto a ϕ si ricava l'equazione di Eulero–Lagrange:

$$\square\phi + \left(m^2 + \xi R\right)\phi = 0, \quad (3.3)$$

dove $\square$ è l'operatore d'alembertiano covariante

$$\square\phi := g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left[g^{ab}\sqrt{-g}\partial_b\phi\right]. \quad (3.4)$$

Le soluzioni di (3.3) sono univocamente determinate dai loro dati iniziali su una ipersuperficie di Cauchy Σ , che esiste per la globale iperbolicità di $\mathcal{M}$. Inoltre nello spazio delle soluzioni è possibile introdurre la struttura simplettica definendo il *prodotto di Klein–Gordon* (che generalizza (2.24)):

$$\begin{aligned} (\phi_\alpha, \phi_\beta) &= i \int_\Sigma \left[\phi_\alpha^*(\underline{x}) \partial_a \phi_\beta(\underline{x}) - \partial_a (\phi_\alpha^*(\underline{x})) \phi_\beta(\underline{x}) \right] \sqrt{-\gamma} d\Sigma^a \\ &=: i \int_\Sigma \phi_\alpha^*(\underline{x}) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_a \phi_\beta(\underline{x}) \sqrt{-\gamma} d\Sigma^a, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove $d\Sigma^a = n^a d\Sigma$ con n^a un versore orientato verso il futuro e normale a Σ e γ il determinante della metrica indotta su Σ . Con un semplice calcolo diretto si mostra poi che la corrente di Klein–Gordon $J_a(\phi_\alpha, \phi_\beta) := \phi_\alpha^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_a \phi_\beta$ è a divergenza nulla e, per il teorema di Gauss, che la quantità $(\phi_\alpha, \phi_\beta)$ è indipendente da Σ .

Per procedere con la quantizzazione canonica abbiamo bisogno di un vettore di Killing rispetto a cui definire delle soluzioni a frequenza positiva, introduciamo quindi una carta con coordinate locali $\{x^0, x^1, \dots, x^n\}$, tale che $t := x^0$ sia di tipo tempo.

Definiamo quindi il *momento canonico coniugato*

$$\pi(\underline{x}) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \sqrt{-g} g^{0a} \partial_a \phi. \quad (3.6)$$

Per quanto visto nel precedente capitolo, è possibile “promuovere” queste quantità a operatori e imporre delle relazioni di commutazioni canoniche (analoghe a quelle viste per l'oscillatore armonico):

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, x), \hat{\pi}(t, y)] &= i\delta^{(n)}(x - y), \\ [\hat{\phi}(t, x), \hat{\phi}(t, y)] &= 0 \quad [\hat{\pi}(t, x), \hat{\pi}(t, y)] = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove $\delta^{(n)}$ è la delta di Dirac rispetto alle variabili n –dimensionali x e y .

A questo punto introducendo un insieme di modi ortonormali, è possibile decomporre ϕ , introducendo un relativo spazio di Fock e operatori con un'algebra definita dalle relazioni di commutazione (3.7).

Tuttavia, mentre nel caso minkowskiano sembra esserci un insieme completo di autofunzioni del tutto naturale con cui procedere, in uno spaziotempo generico non ci sono scelte preferenziali. Questo fatto è dovuto alla presenza o meno di un gruppo di simmetrie: per lo spazio di Minkowski vi è quello di Poincaré, mentre in generale non ci sono affatto simmetrie e ciò non permette di trovare sempre un “sottospazio di soluzioni a frequenza positiva”, che è essenziale nella definizione di *particella* in teoria quantistica dei campi.

Date queste premesse, procediamo più nel dettaglio con la quantizzazione nello spaziotempo di Minkowski.

3.2 Spaziotempo di Minkowski

Lo spaziotempo di Minkowski, che indicheremo con $\mathcal{M}^4$, è una varietà piatta (i.e. con tensore di Riemann nullo), omeomorfa ad $\mathbb{R}^4$ e quindi con coordinate globali $(t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$ e dotata della metrica di Minkowski $\eta^{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

3.2.1 Quantizzazione

La densità di lagrangiana (3.1) in questo caso si riduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - m^2\phi^2), \quad (3.8)$$

e quindi ϕ soddisfa l'equazione di campo

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad \text{con} \quad \square = \eta^{ab}\partial_a\partial_b. \quad (3.9)$$

Osservazione 3.2.1. Storicamente si cercò di trovare, per una particella quantistica, un'equazione d'onda che fosse analoga alla (1.33). Sostituendo la relazione relativistica

$$E = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m^2} \quad (3.10)$$

al posto dell'hamiltoniana nell'equazione di Schrödinger, è possibile assumere che l'evoluzione dinamica di una particella quantistica in $\mathcal{M}^4$ sia caratterizzata da una funzione complessa $\phi(\underline{x})$ soddisfacente

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = [-\nabla^2 + m^2]^{1/2}\phi. \quad (3.11)$$

Per risolvere il problema di trattare la radice quadrata di un operatore (che non avendo presente la teoria spettrale è preoccupante) si può moltiplicare la (3.11) per l'operatore, anch'esso oscuro, $i\partial_t + [-\nabla^2 + m^2]^{1/2}$ ottenendo (3.9). Storicamente quindi si ricavò l'equazione di Klein-Gordon nello spaziotempo di Minkowski in questo modo e poi si osservò che essa poteva essere derivata col principio di Hamilton dalla (3.8) la quale ha (3.1) come generalizzazione.

Si osservi anche che quanto detto spiega perché nell'assioma 5, si siano considerate solo le ϕ a frequenza positiva: soluzioni di (3.11).

Torniamo alla (3.9), una scelta naturale, in un senso che sarà poi chiaro, di insieme completo di soluzioni è quello formato da

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad \text{con} \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (3.12)$$

e le loro complesse coniugate $u_{\mathbf{k}}^*$.

Si noti che con questa scelta si rientra nel formalismo sviluppato nel secondo capitolo, con i seguenti accorgimenti

$$j = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \psi_j(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad d\mu(j) = \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}}, \quad \omega_j^2 = \mathbf{k}^2 + m^2. \quad (3.13)$$

I coefficienti in (3.12) sono scelti in modo da normalizzare l'insieme rispetto al prodotto di Klein-Gordon, che in questo caso è

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) &= i \int_{t=\text{cost}} \left[\psi^*(x) \partial_t \phi(x) - \left(\partial_t \psi^*(x) \right) \phi(x) \right] d^3x \\ &=: i \int_{t=\text{cost}} \psi^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_t \phi(x) d^3x, \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove l'integrale è svolto sulle ipersuperfici di Cauchy $\{t = \text{cost}\}$. Avendo a che fare con un insieme di indici continuo, le condizioni di ortonormalità risultano:

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = -(u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^*) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^*) = 0. \quad (3.15)$$

Il momento coniugato e le relazioni di commutazione fra gli operatori sono rispettivamente $\pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi$ e

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] &= 0, \quad [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Possiamo quindi sviluppare $\hat{\phi}$ con la seguente trasformazione

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^3k \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right], \quad (3.17)$$

dove $\hat{a}_{\mathbf{k}} := \hat{a}(\mathbf{k})$ sono gli operatori di distruzione, mentre $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ sono quelli di creazione (definiti come nel capitolo precedente).

L'algebra degli operatori di campo (3.16) definisce quella degli operatori di creazione e distruzione sullo spazio di Fock; per questi valgono

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] &= 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Come osservato dopo la (2.39) è possibile costruire in modo ricorsivo tutto $\mathcal{F}_0$ (di cui lo spazio di Fock $\mathcal{F}$ è il completamento). In particolare partendo dallo stato di vuoto $|0\rangle$ — quello annullato da tutti gli $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, i.e. $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ per ogni $\mathbf{k}$ — è possibile costruire gli stati a una o più particelle.

Ad esempio, lo stato con un'unica particella di modo $\mathbf{k}$ è $|1_{\mathbf{k}}\rangle := \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$; più in generale lo stato contenente 1n particelle con momento $\mathbf{k}_1$, 2n particelle con $\mathbf{k}_2$, etc. è

$$|^1n_{\mathbf{k}_1}, \dots, ^jn_{\mathbf{k}_j}\rangle = \left(^1n! \dots ^jn! \right)^{-1/2} (\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger)^{^1n} \dots (\hat{a}_{\mathbf{k}_j}^\dagger)^{^jn} |0\rangle. \quad (3.19)$$

3.2.2 Tensore energia-momento-sforzi e Hamiltoniana

Richiamiamo a questo punto il tensore energia-momento-sforzi (canonico) per un campo scalare classico ϕ :

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \partial_a \phi \partial_b \phi - \mathcal{L} \eta_{ab} \\ &= \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} \eta^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{ab}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

da cui è possibile ricavare rispettivamente la densità di Hamiltoniana e di momento:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left((\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_{x^i} \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right), \quad T_{0i} = \partial_t \partial_{x^i} \phi \quad \text{per } i = 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

Imponendo che tali relazioni valgano anche per l'operatore ϕ , sostituendo (3.17) in quest'ultima e integrando su un'ipersuperficie spaziale otteniamo l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \hat{H} &:= \int_{t=\text{cost}} T_{00} d^3x = \frac{1}{2} \int d^3k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \omega_{\mathbf{k}} \\ &\stackrel{*}{=} \int d^3k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right) \omega_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

(avendo usato (3.18) in $\star$) e le componenti del momento

$$\hat{P}_i := \int_{t=\text{cost}} T_{0i} d^3x = \int d^3k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) k_i, \quad \text{per } i = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Ricordando la definizione dell'operatore che “conta” il numero di particelle relative al modo $\mathbf{k}$, ossia $\hat{N}_{\mathbf{k}} := \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$, dalla (3.22) si nota come un campo scalare quantistico sia di fatto assimilabile a una collezione infinita di oscillatori armonici disaccoppiati. Il termine con la δ di Dirac è dovuto alla presenza di un'energia di punto zero non nulla per i vari oscillatori e ha delle (spesso) scomode conseguenze.

Ad esempio, mentre il calcolo del valore d'aspettazione di una componente del momento nello stato di vuoto non dà problemi:

$$\langle 0 | \hat{P}_i | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{N}_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{k}, \quad (3.24)$$

nel caso dell'Hamiltoniana non solo si trova un'energia di punto zero non nulla, ma persino infinita:

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle \frac{1}{2} \int d^3k \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \omega_{\mathbf{k}} = \int d^3k \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \omega_{\mathbf{k}} = \infty. \quad (3.25)$$

Questi problemi di *divergenza infrarossa*¹ emergono sovente nella teoria quantistica dei campi. Fortunatamente nel nostro caso, trovandoci in uno spaziotempo piatto, è possibile eliminare il problema introducendo un *ordinamento normale* (in simboli $:\bullet:$) che prescrive, ogni qualvolta siano presenti entrambi gli operatori di creazione e distruzione, che $\hat{a}$ sia alla destra di $\hat{a}^\dagger$; in questo modo abbiamo ad esempio

$$:\hat{H}: = \frac{1}{2} \int d^3k : \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) : \omega_{\mathbf{k}} = \int d^3k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.26)$$

L'utilizzo di questo *escamotage* può lasciare inizialmente perplessi, tuttavia se si pensa al processo di quantizzazione di un sistema fisico, facendo corrispondere ad osservabili classici (scalari) degli operatori, è chiaro come si passi da un'algebra commutativa a una, più complessa, che non lo è. *Inizialmente* è dunque necessario, avendo una corrispondenza non biunivoca, scegliere un ordinamento (che venga poi mantenuto).

Come anticipato, in uno spaziotempo curvo la scelta di un ordinamento non è sempre possibile, tuttavia per i nostri scopi quanto detto è più che sufficiente e non sarà necessario una trattazione più approfondita.

¹Per approfondimenti in merito si veda [18].

3.3 Simmetrie

Ricordiamo ora alcune definizioni preliminari per un generico spaziotempo $\mathcal{M}$ di dimensione n .

Definizione 3.3.1. Sia $\rho : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un gruppo a 1-parametro di isometrie, i.e. tale che $\rho^* g_{ab} = g_{ab}$; allora il campo vettoriale ξ che genera il gruppo è detto *di Killing*.

In uno spaziotempo con simmetrie i vettori di Killing individuano appunto delle direzioni preferenziali lungo cui si preserva la metrica.

Definizione 3.3.2. Uno spazio è detto *massimamente simmetrico* se contiene il massimo numero di vettori di Killing, ossia quello relativo ad $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.

Un esempio di spazio massimamente simmetrico è proprio quello di Minkowski, quest'ultimo infatti possiede, come gruppo di simmetrie, quello di Poincaré che ha dimensione 10. È generato infatti da dieci campi vettoriali di Killing indipendenti: le traslazioni lungo i quattro assi, le tre rotazioni sui piani spaziali e le rotazioni iperboliche sui tre piani spazio-temporali, i cosiddetti *boost*.

A questo punto possiamo notare come la scelta delle soluzioni a frequenza positiva (3.12) sia naturale, nel senso che rispecchia le simmetrie di $\mathcal{M}^4$, le $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ sono infatti autofunzioni del vettore di Killing ∂_t (corrispondente ai boost):

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \quad \omega_{\mathbf{k}} > 0. \quad (3.27)$$

In generale in uno spaziotempo curvo non ci saranno campi vettoriali di Killing rispetto a cui definire modi a frequenza positiva, questo — sebbene sia in pieno accordo con l'approccio relativistico per cui le coordinate non abbiano significato fisico — genera talvolta dei problemi interpretativi.

3.4 Trasformazioni di Bogoliubov

Sorprendentemente, anche nello spaziotempo di Minkowski esistono quantizzazioni inequivalenti dovute, in ultima analisi, proprio ai troppi vettori di Killing presenti.

Supponiamo di avere a disposizione due insiemi completi — per lo spazio delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon — di modi a frequenza positiva f_i e g_j .

Osservazione 3.4.1. Per semplicità di notazione abbiamo supposto che le f_i e g_i siano ortonormalizzate rispetto a (3.14):

$$\begin{aligned} (f_i, f_{i'}) &= -(f_i^*, f_{i'}^*) = \delta_{i,i'}, & (f_i, f_{i'}^*) &= 0, \\ (g_j, g_{j'}) &= -(g_j^*, g_{j'}^*) = \delta_{j,j'}, & (g_j, g_{j'}^*) &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

e che gli insiemi di indici I e J siano discreti; ciò non comporta perdita di generalità, è infatti possibile introdurre delle condizioni di periodicità considerando lo spazio come un cubo di lato L arbitrariamente grande.

Possiamo sviluppare il campo nelle due basi che, quantizzando ϕ , danno luogo a due diversi spazi di Fock e operatori di creazione (distruzione) $\hat{a}_i^\dagger$ e $\hat{b}_j^\dagger$ ($\hat{a}_i$ e $\hat{b}_j$). Si ha quindi

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \left(\hat{a}_i f_i(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_i^\dagger f_i^*(t, \mathbf{x}) \right), \quad (3.29)$$

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j \in J} \left(\hat{b}_j g_j(t, \mathbf{x}) + \hat{b}_j^\dagger g_j^*(t, \mathbf{x}) \right). \quad (3.30)$$

Poiché gli f_i formano un insieme completo, è possibile esprimere ciascun g_j come loro combinazione lineare:

$$g_j = \sum_{i \in I} \left(\alpha_{ji} f_i + \beta_{ji} f_i^* \right), \quad \text{per ogni } j \in J. \quad (3.31)$$

D'altronde è possibile fare anche il contrario ricavando

$$f_i = \sum_{j \in J} \left(\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^* \right), \quad \text{per ogni } i \in I, \quad (3.32)$$

dove per determinare le condizioni sui coefficienti abbiamo usato la proprietà $(f_i, g_j) = (g_j, f_i)^*$ del prodotto interno di Klein–Gordon.

Definizione 3.4.2. Le relazioni (3.31) e (3.32) sono note come *trasformazioni di Bogoliubov*, mentre i coefficienti α_{ij} e β_{ij} (che formano le matrici delle trasformazioni nelle basi fissate) sono detti *coefficienti di Bogoliubov*.

Per calcolare esplicitamente i coefficienti di Bogoliubov basta utilizzare la (3.31) e (3.28) ottenendo

$$\alpha_{ji} = (f_i, g_j), \quad \beta_{ji} = -(f_i^*, g_j). \quad (3.33)$$

Analizziamo l'azione di una trasformazione di Bogoliubov sugli operatori di creazione e distruzione. Uguagliando (3.29) e (3.30) e utilizzando le relazioni (3.31), (3.32) possiamo scrivere gli operatori associati a una certa base rispetto agli altri:

$$\hat{a}_i = \sum_{j \in J} \left(\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right), \quad \hat{a}_i^\dagger = \sum_{j \in J} \left(\alpha_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{b}_j \right) \quad (3.34)$$

e viceversa

$$\hat{b}_j = \sum_{i \in I} \left(\alpha_{ji}^* \hat{a}_i - \beta_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger \right), \quad \hat{b}_j^\dagger = \sum_{i \in I} \left(\alpha_{ji} \hat{a}_i^\dagger - \beta_{ji} \hat{a}_i \right). \quad (3.35)$$

Osserviamo che nel caso in cui i coefficienti β_{ji} non siano tutti nulli la trasformazione mescola operatori di creazione e distruzione, rompendo la corrispondenza fra operatori di creazione (resp. di distruzione) nelle due formulazioni; ciò si poteva già intuire dalla (3.33) notando che i β_{ji} contengono informazioni sia sui modi a frequenza positiva g_j che negativa f_i^* .

In altre parole se utilizziamo due diversi insiemi di modi a frequenza positiva (legati da una trasformazione di Bogoliubov con i β_{ji} non tutti nulli) per sviluppare

un campo e quantizzarlo, la presenza di una particella in un certo stato o la sua creazione sono “osservazioni” che dipendono dal tipo di scelta adottata. Infatti, gli operatori di creazione e distruzione per i due insiemi non sono equivalenti, e perciò nemmeno gli spazi di Fock (costruiti iterativamente come nel capitolo 2).

In particolare gli stati di vuoto delle due formulazioni, chiamiamoli rispettivamente $|0_A\rangle$ e $|0_B\rangle$, non coincidono! Infatti si ha

$$\hat{a}_i|0_B\rangle = \sum_{j \in J} \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger |0_B\rangle = \sum_{j \in J} \beta_{ji}^* |1_j^B\rangle \neq 0, \quad (3.36)$$

e

$$\hat{b}_j|0_A\rangle = - \sum_{i \in I} \beta_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger |0_A\rangle = - \sum_{i \in I} \beta_{ji}^* |1_i^A\rangle \neq 0. \quad (3.37)$$

Come vedremo nel capitolo 5, ciò è ad esempio quello che accade fra un osservatore inerziale che utilizza i modi (3.12) e uno uniformemente accelerato che utilizza un altro insieme completo di soluzioni, ricavate rispetto al suo tempo proprio.

Capitolo 4

Spazio di Rindler

Lasciamo un attimo da parte la teoria quantistica dei campi per richiamare brevemente qualche concetto di Relatività Ristretta. In particolare, tratteremo lo spazio di Rindler [5], introdotto nello studio del moto uniformemente accelerato in $\mathcal{M}^4$. Quest'ultimo rivestirà un ruolo importante per i nostri scopi: sebbene l'effetto Unruh si manifesti in qualsiasi moto non inerziale, nel caso in cui l'accelerazione propria sia costante esso ammette una formulazione esplicita e per questo è usato come punto di partenza per studi perturbativi.

4.1 Moto iperbolico

In questo capitolo lavoreremo nello spaziotempo di Minkowski $\mathcal{M}^4$ utilizzando una carta con coordinate $(t, \mathbf{x}) := (t, x, y, z)$ definita globalmente e la metrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (4.1)$$

Consideriamo un punto geometrico che segue la linea universo x^a e avente quadri-velocità

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} = \gamma \frac{dx^a}{dt} = (\gamma, \gamma \mathbf{v}), \quad (4.2)$$

dove τ è il tempo proprio e $\mathbf{v}$ è la velocità della “particella”, mentre $\gamma := \gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$ è il fattore lorentziano. Analogamente si calcola la quadriaccelerazione

$$\alpha^a = \frac{du^a}{d\tau} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} \right) =: (\alpha^0, \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.3)$$

Definizione 4.1.1. L'*accelerazione propria* di una particella è quella misurata nel sistema di riferimento in cui essa ha istantaneamente velocità nulla, ovvero

$$\alpha_P^a := \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} \right) \Big|_{\mathbf{v}=0} = \left(0, \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) = (0, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.4)$$

Si dice che una particella compie un *moto iperbolico* se la sua accelerazione propria rimane costante; si noti che i moti iperbolici sono ammissibili per particelle reali in quanto α_P^a è di tipo spazio:

$$\eta_{ab} \alpha_P^a \alpha_P^b = -\boldsymbol{\alpha}^2 \leq 0. \quad (4.5)$$

Volendo studiare moti con accelerazione propria costante, è conveniente supporre che il movimento avvenga lungo l'asse x , riducendoci quindi a lavorare con una singola dimensione spaziale. In questo caso $\mathbf{v} = v$ e $\boldsymbol{\alpha} = \alpha$ sono la velocità e l'accelerazione scalari lungo x , che per la (4.3) sono legate da

$$\alpha = \frac{d(\gamma v)}{dt} = \text{cost.} \quad (4.6)$$

Per ricavare la legge oraria, basta integrare quest'ultima ponendo $v(0) = 0$ ottenendo così

$$\alpha t = \gamma(v) v. \quad (4.7)$$

Sostituendo $v = dx/dt$ e integrando, si ricava

$$v = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}}, \quad x = \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (\alpha t')^2}} dt' = \alpha^{-1} \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}, \quad (4.8)$$

avendo posto $x(0) = \alpha^{-1}$. Infine, prendendo il quadrato di quanto calcolato si ottiene l'equazione della linea universo (vedi figura 4.1). La traiettoria è rappresentata da uno dei due rami d'iperbole (e ciò spiega il titolo della sezione) di equazione

$$x^2 - t^2 = 1/\alpha^2. \quad (4.9)$$

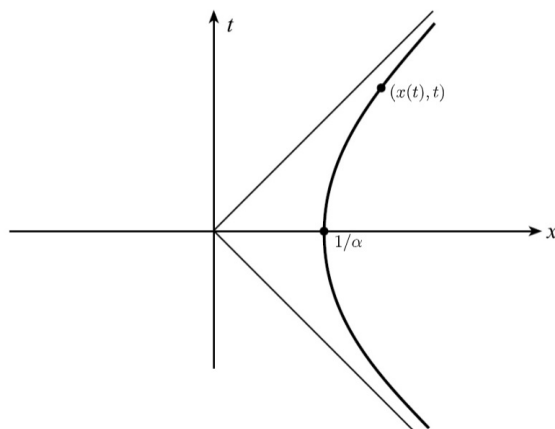


Figura 4.1: Linea universo di un corpo uniformemente accelerato.

Se $\alpha > 0$ la linea universo percorsa è il ramo destro: la particella parte da $(t = -\infty, x = +\infty)$ con velocità -1 e, procedendo verso l'origine si avvicina fino a una distanza $1/\alpha$ da quest'ultimo, per poi ripartire con velocità positiva verso $(t = +\infty, x = +\infty)$; si noti come, sebbene l'accelerazione propria resti costante, la velocità istantanea v cambi di segno durante il corso del moto.

Le semirette $t = x$ e $t = -x$ partono dall'origine e costituiscono un asintoto per $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$, inoltre dalla (4.8) si deduce che durante il moto $|v| < 1$ e perciò

la particella — per quanto acceleri — non raggiunge mai la velocità della luce, se non asintoticamente all'infinito.

Per $\alpha < 0$ invece, la linea universo è il ramo d'iperbole sinistro e le considerazioni fatte sopra sono analoghe.

Concludiamo la sezione osservando che è possibile parametrizzare la (4.9) rispetto al tempo proprio $\tau = t/\gamma$ della particella. Da quest'ultima si ricava infatti

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - (\alpha t')^2} = \alpha^{-1} \sinh^{-1}(\alpha t) \quad (4.10)$$

che invertita da

$$t = \alpha^{-1} \sinh(\alpha \tau). \quad (4.11)$$

Sostituendo quest'ultima nella (4.9) si ha poi

$$x = \alpha^{-1} \cosh(\alpha \tau). \quad (4.12)$$

Osservazione 4.1.2. È facile dimostrare come il *boost* di parametro β

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta \\ \sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

generi uno shift del tempo proprio: $\tau \mapsto \tau' = \tau + \beta/\alpha$ e perciò lasci invariate le linee universo iperboliche.

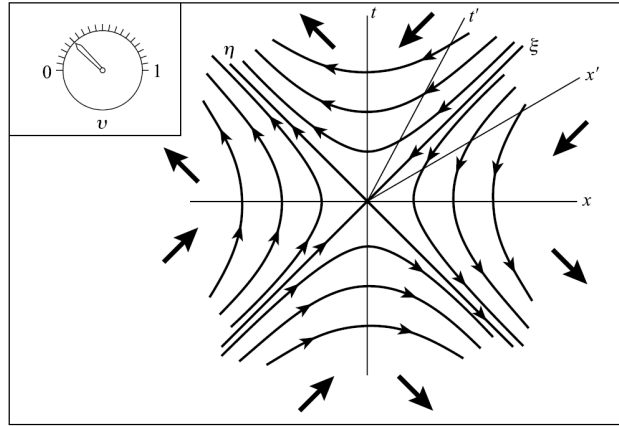


Figura 4.2: “Effetto dinamico” delle trasformazioni di Lorentz sulle linee universo iperboliche.

Si osserva quindi un fatto curioso ed interessante: sebbene, come già detto, un corpo con accelerazione propria costante non raggiunga mai la velocità della luce, se si inviasse un segnale (un fotone) da una sorgente nell'origine a distanza α^{-1} dalla particella al tempo $t = 0$, esso non raggiungerebbe mai il bersaglio. La distanza fra il fotone e la particella, misurata in ogni sistema di riferimento in cui essa è istantaneamente in quiete, è sempre pari a α^{-1} . Infatti applicando un boost di parametro $\beta := -\alpha\tau$ (come nella (4.13)) si vede quanto accade nel sistema in cui la particella è ferma al tempo proprio τ (vedi figura 4.2): essa si trova sull'asse x' a distanza α^{-1} dal fotone che è invece riposizionato nell'origine di $t' - x'$.

4.2 Coordinate di Rindler

Le linee universo iperboliche sono quindi, in un certo senso, privilegiate sia da un punto di vista fisico, in quanto traiettorie di corpi con accelerazione propria costante, che matematico, essendo conservate dalle trasformazioni di Lorentz.

Quanto detto ci suggerisce di studiare $\mathcal{M}^4$ introducendo un sistema di reticolo di coordinate iperboliche, la (4.11) e la (4.12) ci suggeriscono infatti che al variare di α sia possibile identificare i punti di $\mathcal{M}^4$. Consideriamo il cambio di coordinate

$$(t, x, y, z) \mapsto (T, X, Y, Z) \quad (4.14)$$

definite come

$$t = X \sinh T, \quad x = X \cosh T, \quad y = Y \quad z = Z. \quad (4.15)$$

Si noti che per X, Y, Z costanti (e X non nulla) le *coordinate di Rindler* (4.15) rappresentano la linea universo di una particella con accelerazione propria $\alpha = 1/X$ e tempo proprio $\tau = X T$.

La metrica inoltre diventa

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (4.16)$$

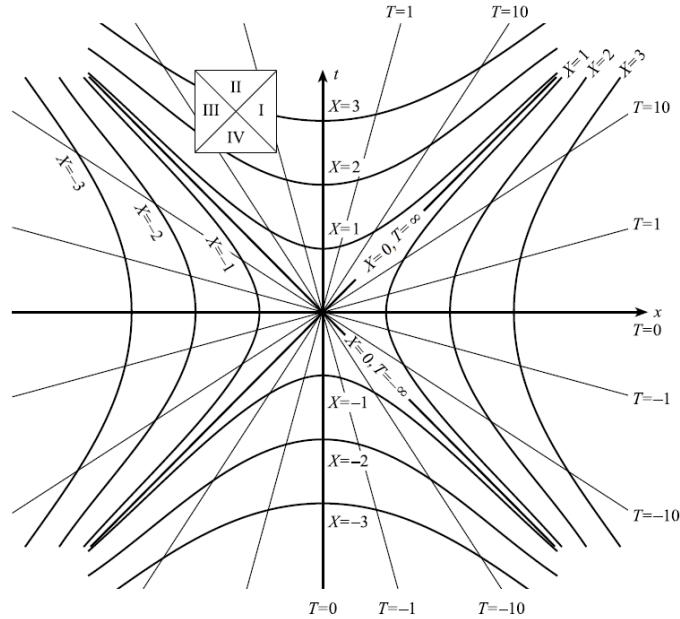


Figura 4.3: Sezione $x - t$ dello spaziotempo di Minkowski in coordinate di Rindler.

Con riferimento alla figura 4.3 si noti che il quadrante I è rappresentato dalle coordinate di Rindler per $X > 0$, mentre il *cuneo* III si ottiene per $X < 0$. In queste sezioni le iperboli $X = \text{cost}$ rappresentano le linee universo dei punti del reticolo e ad esse sono ortogonali le rette $T = \text{cost}$ - corrispondenti agli istanti “adattati”.

Le rette $t = x$ e $t = -x$ corrispondono rispettivamente, nelle nuove coordinate, a $(X = 0, T = +\infty)$ e $(X = 0, T = -\infty)$, esse sono denominate *orizzonti di Rindler*.

I cunei $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ (vedi pagina seguente) corrispondenti alle sezioni I e III, sono infatti causalmente sconnessi: per un osservatore con $\alpha > 0$ costante nessun segnale può entrare attraverso il semi-iperpiano $\{t = x, x > 0\}$ e nessuna informazione può uscire da $\{t = -x, x > 0\}$.

Osservazione 4.2.1. Le coordinate (4.15) parametrizzano solamente i quadranti I e III, per ottenere gli altri cunei è necessario introdurre una nuova trasformazione invertendo i seni e coseni (ottenendo così una metrica con segnatura $- + --$):

	I ($X > 0$) e III ($X < 0$)	II ($X > 0$) e IV ($X < 0$)
$t =$	$X \sinh T$	$X \cosh T$
$x =$	$X \cosh T$	$X \sinh T$
$x^2 - t^2 =$	X^2	$-X^2$
$dt^2 - dx^2 =$	$X^2 dT^2 - dX^2$	$-X^2 dT^2 + dX^2$

Bisogna però precisare che mentre ∂_T è un vettore di Killing in I e III, ciò non è vero per i cunei II e IV e perciò — a differenza del primo caso — non è possibile definire un sistema di osservatori ivi interamente contenuti [5].

L'introduzione di queste coordinate divide perciò lo spaziotempo di Minkowski in quattro regioni:

$$\mathcal{R} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M}^4 : x > |t|\} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{F} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M}^4 : t > |x|\} \quad (4.18)$$

$$\mathcal{L} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M}^4 : x < -|t|\} \quad (4.19)$$

$$\mathcal{P} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M}^4 : t < -|x|\} \quad (4.20)$$

aventi rispettivamente sezioni I, II, III e IV corrispondenti ai quadranti in figura 4.3.

Definizione 4.2.2. La regione $\mathcal{R}$ con le coordinate (4.15) è detto *spazio di Rindler*. Diremo poi che un *osservatore* è di *Rindler e destro* (o rispettivamente *sinistro*) se possiede accelerazione propria costante e questa è > 0 (o < 0).

4.3 Altri sistemi di coordinate in $\mathcal{R}$

Per i nostri scopi, sarà utile introdurre altri sistemi di coordinate per lavorare nei cunei $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$. Ci concentreremo su queste due regioni poiché, come detto nell'osservazione 4.2.1, solo qui è possibile definire osservatori statici.

4.3.1 Coordinate di Lass

Una trasformazione di coordinate più generale rispetto a (4.15) per sistema di osservatori di Rindler destri è

$$\begin{cases} t(\eta, \xi) = a^{-1} f(\xi) \sinh(a\eta) \\ x(\eta, \xi) = a^{-1} f(\xi) \cosh(a\eta), \end{cases} \quad (4.21)$$

dove a è una costante reale positiva, η una coordinata che rappresenta il tempo proprio di un certo osservatore (quello con $\alpha = a$ e $f(\xi) = 1$) e $f(\xi)$ una funzione

continua che permetta di passare da un osservatore all'altro. Ponendo $f(\xi) := e^{a\xi}$ sono definite le cosiddette *coordinate Radar* (o di *Lass*):

$$\begin{cases} t(\eta, \xi) = a^{-1}e^{a\xi} \sinh(a\eta) \\ x(\eta, \xi) = a^{-1}e^{a\xi} \cosh(a\eta). \end{cases} \quad (4.22)$$

Si osservi che le coordinate di Lass per $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ parametrizzano lo spazio di Rindler $\mathcal{R}$, inducendo ivi la metrica

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\eta^2 - d\xi^2) - dy^2 - dz^2. \quad (4.23)$$

Si può dimostrare che le ipersuperfici $\eta = \text{cost}$ sono di Cauchy in $\mathcal{R}$ e che quindi questo è globalmente iperbolico [19].

Allo stesso modo è possibile introdurre le (4.22) nel cuneo sinistro $\mathcal{L}$ ripetendo la costruzione con le coordinate $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, y, z)$ definite da

$$\begin{cases} t(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = a^{-1}e^{a\bar{\xi}} \sinh(a\bar{\eta}) \\ x(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = -a^{-1}e^{a\bar{\xi}} \cosh(a\bar{\eta}), \end{cases} \quad (4.24)$$

dove a è sempre una costante positiva e $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ variano in $\mathbb{R}$. Infine la metrica è

$$ds^2 = e^{2a\bar{\xi}}(d\bar{\eta}^2 - d\bar{\xi}^2) - dy^2 - dz^2 \quad (4.25)$$

e i ragionamenti sulle ipersuperfici di Cauchy sono analoghi a quelli citati sopra per $\mathcal{R}$.

4.3.2 Orizzonti di Rindler

La caratteristica forse più interessante dello spazio di Rindler è quella di possedere degli orizzonti. Questi permettono di costruire un'analogia fra un osservatore di Rindler nello spaziotempo di Minkowski ed uno statico nello spaziotempo di Schwarzschild in prossimità di un buco nero.

È possibile costruire questo parallelismo cercando di definire una metrica valida sia per le regioni I e III che II e IV. Una modo per farlo è infatti proprio quello di introdurre una “singolarità fittizia” definendo una nuova coordinata R :

$$2R - 1 = x^2 - t^2 = \begin{cases} X^2 & (\text{I, III}) \\ -X^2 & (\text{II, IV}) \end{cases} \quad (4.26)$$

e troncare lo spazio così ottenuto in corrispondenza di $R = 0$ (vedi figura 4.4).

Nello spazio così ottenuto la metrica è

$$ds^2 = (2R - 1)dT^2 - (2R - 1)^{-1}dR^2 - dY^2 - dZ^2, \quad (4.27)$$

inoltre i due rami di iperbole $R = 0$ diventano i limiti passato e futuro dello spaziotempo che, in un certo senso, è un universo di durata finita. Infatti all'interno degli orizzonti (nelle regioni in cui $R < 1/2$) le traiettorie che iniziano nel “limite passato” terminano in un tempo proprio finito nel limite futuro.

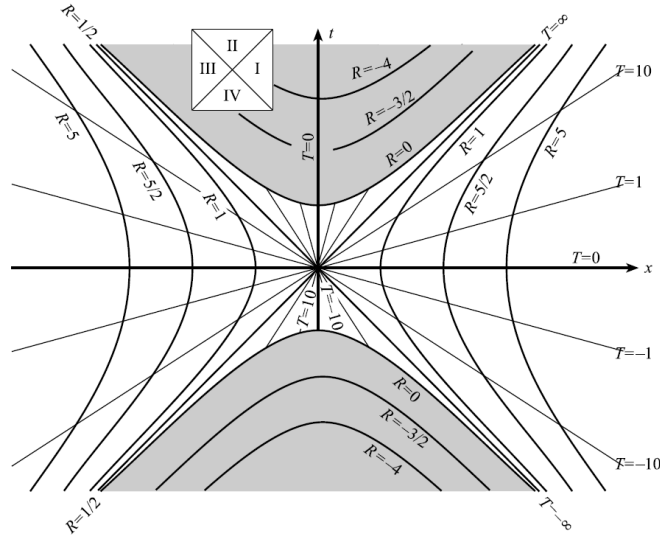


Figura 4.4: Il troncamento di $\mathcal{M}^4$ lungo $R = 0$; non viene considerata la zona $x^2 - t^2 < -1$.

Linee universo di durata infinita sono ammesse solamente all'esterno degli orizzonti e solo da corpi in permanente accelerazione: cosa evidente — per motivi geometrici — dalla figura; si osservi che una volta nel II (o IV) quadrante la traiettoria deve terminare in $R = 0$ perché per uscire dalla regione dovrebbe superare la velocità della luce. È proprio l'accelerazione a prevenire dalla caduta nell'orizzonte e produrre la dilatazione temporale necessaria all'esistenza illimitata.

Anche con queste modifiche, la struttura di $\mathcal{M}^4$ troncato appare a noi osservatori esterni di facile comprensione. Dal punto di vista di un osservatore di Rindler, invece, la situazione è più complessa. Costui “vive” in un mondo immutabile, la luce dell'orizzonte resta alla stessa distanza, e sebbene la metrica per lui più conveniente sia (4.16), per nostra fortuna si trova bene anche con (4.27).

Osservazione 4.3.1. L'aver introdotto questo “buco nero giocattolo”, sebbene sembra ci abbia portato fuori strada, aiuta a comprendere meglio l'importanza degli *orizzonti di Rindler* e a intuire come l'effetto Unruh nello spazio di Rindler possa essere collegato al famoso fenomeno della radiazione di Hawking di un buco nero.

Concludiamo il capitolo introducendo delle coordinate molto utili per descrivere la fisica degli orizzonti. Definiamo prima il tempo *ritardato* U e *avanzato* V rispetto alle consuete coordinate di Minkowski:

$$U := t - x, \quad V := t + x, \quad (4.28)$$

facendo diventare la metrica $ds^2 = dUdV - dy^2 - dz^2$.

Le *coordinate nulle* sono definite invece come

$$u := \eta - \xi, \quad v := \eta + \xi \quad \text{in } \mathcal{R}, \quad (4.29)$$

$$\bar{u} := \bar{\eta} + \bar{\xi}, \quad \bar{v} := \bar{\eta} - \bar{\xi} \quad \text{in } \mathcal{L} \quad (4.30)$$

e sono perciò le analoghe al tempo ritardato/avanzato rispetto alle coordinate di Rindler. In questo caso invece la metrica è

$$ds^2 = e^{2a(v-u)} dv du - dy^2 - dz^2 \quad \text{in } \mathcal{R} \quad (4.31)$$

e

$$ds^2 = e^{2a(\bar{v}-\bar{u})} d\bar{v} d\bar{u} - dy^2 - dz^2 \quad \text{in } \mathcal{L}. \quad (4.32)$$

Le coordinate nulle sono legate alle (4.28) per mezzo delle trasformazioni

$$U = \begin{cases} -a^{-1}e^{-au} & \text{in } \mathcal{R} \\ a^{-1}e^{a\bar{u}} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases} \quad V = \begin{cases} a^{-1}e^{av} & \text{in } \mathcal{R} \\ -a^{-1}e^{-a\bar{v}} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases}. \quad (4.33)$$

Capitolo 5

Effetto Unruh

Abbiamo finalmente esposto tutti i preliminari necessari a dare la descrizione dell'effetto Unruh. A tal scopo è utile prima definire con maggior precisione cosa si intende per *rivelatore di particelle*, a seguito vedremo quindi prima un esempio di rivelatore — quello di Unruh-deWitt — e poi estenderemo alcuni risultati, di carattere più generale, al caso di una definizione più astratta di rivelatore di particelle.

5.1 Il rivelatore di Unruh–DeWitt

Il modello di Unruh–DeWitt consiste di una particella quantistica avente uno spettro energetico discreto (ad esempio, un oscillatore armonico), accoppiata attraverso interazione di monopolo con un campo scalare $\hat{\phi}$ esterno.

Consideriamo dunque un rivelatore di questo tipo che segue una linea universo $\underline{x}^a(\tau)$, dove τ è il tempo proprio, e sia

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{m}(\tau) \hat{\phi}(\underline{x}(\tau)) \quad (5.1)$$

la sua hamiltoniana di interazione col campo, dove $\hat{m}$ è l'operatore del momento di monopolo e ε una piccola costante di accoppiamento. In virtù di questo, è possibile applicare la teoria perturbativa per calcolare la probabilità di transizione da uno stato all'altro. Infatti in generale sia il campo che il rivelatore non permangono negli stati iniziali, anche supponendo che inizialmente questi siano rispettivamente il vuoto $|0_M\rangle$ e lo stato fondamentale $|E_0\rangle$. Questo poiché per una *traiettoria arbitraria* $\underline{x}^a(\tau)$ il rivelatore va incontro a processi di eccitazione e diseccitazione.

Analizziamo il processo di eccitazione del rivelatore e del campo

$$|E_0\rangle|0_M\rangle \rightsquigarrow |E\rangle|\psi\rangle \quad (5.2)$$

al primo ordine perturbativo¹. In tal caso l'ampiezza di probabilità di transizione è data da²

$$\mathcal{A}_{ass} = i\varepsilon \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \hat{m}(\tau) \hat{\phi}(\underline{x}(\tau)) | 0_M, E_0 \rangle. \quad (5.3)$$

¹Per cui rimandiamo a [20].

²È possibile considerare una costante di accoppiamento dipendente dal tempo $\varepsilon(\tau)$ e supporre che questa tenda a zero all'infinito, così da considerare il caso di accensione/spegnimento del rivelatore e non dover integrare da $-\infty$ a $+\infty$.

Adottando la visuale di Heisenberg sono gli operatori ad evolvere nel tempo, in particolare

$$\hat{m}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{m}(0) e^{-i\hat{H}_0\tau}, \quad (5.4)$$

dove $\hat{H}_0|E\rangle = E|E\rangle$. Inoltre così la (5.3) si fattorizza come

$$\mathcal{A}_{ass} = i\varepsilon \langle E|\hat{m}(0)|\hat{E}_0\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi|\hat{\phi}(\underline{x})|0_M\rangle. \quad (5.5)$$

Ora se il campo $\hat{\phi}$ è stato quantizzato sviluppandolo nei modi (3.12), siccome stiamo lavorando al prim'ordine, la transizione di stato nel campo può avvenire soltanto verso lo stato $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$, ovvero quello in cui è presente un singolo quanto con frequenza $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, per un qualche $\mathbf{k}$. Perciò

$$\langle 1_{\mathbf{k}}|\hat{\phi}(\underline{x})|0_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3k' \langle 1_{\mathbf{k}}|\hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger|0_M\rangle e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}'}t} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3k' \langle 0_M| \left([\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] + \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) |0_M\rangle e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}'}t} \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t} = u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}), \quad (5.8)$$

dove la coordinata temporale t e quelle spaziali $\mathbf{x}$ dipendono dalla linea universo $x^a(\tau)$ del rivelatore.

Esempio 5.1.1. Consideriamo il caso di un rivelatore inerziale con linea universo di tipo tempo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{v}\tau}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (5.9)$$

dove $\mathbf{x}_0$ è la posizione iniziale a $\tau = 0$ e $\mathbf{v} = \text{cost}$, con $|\mathbf{v}| < 1$, essendo la linea universo di tipo tempo. In questo caso l'ampiezza di probabilità (5.3) per $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$ è

$$\mathcal{A}_{ass}^{inerz} = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\tau \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}} \quad (5.10)$$

$$= \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}}{\sqrt{4\pi\omega_{\mathbf{k}}}} \delta\left(E - E_0 + \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad (5.11)$$

dove abbiamo usato la proprietà di ortogonalità del nucleo di Fourier in $\mathbb{R}$. Si noti ora che

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \leq |\mathbf{k}||\mathbf{v}| < |\mathbf{k}| \leq \omega_{\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad E > E_0, \quad (5.12)$$

perciò l'argomento della δ di Dirac in (5.11) è sempre positivo e da ciò segue che l'ampiezza di transizione è nulla. Si conclude che i rivelatori inerziali che partono nello stato fondamentale vi permangono e la conservazione dell'energia impedisce l'eccitazione. Ciò dipende, in ultima analisi, dall'aver considerato il campo quantizzato con la consueta costruzione nei modi (3.12), i quali sono invarianti per trasformazioni di Poincaré.

Cosa succede invece se la linea universo del rivelatore non è inerziale? Chiaramente la (5.11) non condurrebbe ad una delta che si annulla sempre e l'ampiezza di transizione che ne risulta è in generale non zero. Per analizzare questo caso indaghiamo la probabilità di transizione verso tutti i possibili stati del rivelatore $|E_n\rangle$ e su un insieme completo di stati $|\psi_{\mathbf{j}}\rangle$ per il campo. La probabilità di transizione verso $|E_n\rangle|\psi_{\mathbf{j}}\rangle$ è $|\mathcal{A}_{ass}(E_n|\psi_{\mathbf{j}})|^2$, dove

$$\mathcal{A}_{ass}(E_n|\psi_{\mathbf{j}}) = i\varepsilon\langle E_n|\hat{m}(0)|E_0\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi_{\mathbf{j}}|\hat{\phi}(\underline{x})|0_M\rangle; \quad (5.13)$$

sommando sugli n e integrando sui $\mathbf{j}$ otteniamo la probabilità di transizione verso un qualsiasi stato:³

$$\mathcal{P}_{ass} = \int d^3j \left(\sum_n |\mathcal{A}_{ass}(E_n|\psi_{\mathbf{j}})|^2 \right) \quad (5.14)$$

$$= \varepsilon^2 \sum_n |\langle E_n|\hat{m}(0)|E_0\rangle|^2 \mathcal{F}(E_n - E_0), \quad (5.15)$$

avendo posto

$$\mathcal{F}(E) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} G_+(\underline{x}(\tau); \underline{x}(\tau')), \quad (5.16)$$

dove G_+ è la funzione di Wightman per cui vale (2.72).

Osservazione 5.1.2. Per linee universo nello spaziotempo di Minkowski per cui vale

$$G_+(x(\tau); x(\tau')) = f(\Delta\tau), \quad \text{con} \quad \Delta\tau := \tau - \tau', \quad (5.17)$$

ovvero la dipendenza funzionale di G_+ da τ è invariante per traslazioni temporali del tipo $\tau \mapsto \tau + \text{cost}$, allora l'energia — o meglio il numero di quanti — assorbita dal rivelatore per unità di tempo è costante. Dalla (5.16) è chiaro che anche la probabilità di transizione diverge; tuttavia è facile notare che si tratta una *divergenza infrarossa*, ovvero causata dal dominio di integrazione. È possibile quindi risolvere il problema e normalizzare la misura introducendo una costante di accoppiamento $\varepsilon(\tau)$ che tende a zero all'infinito. In alternativa, basta lavorare con la probabilità di transizione per unità di tempo, detto anche *tasso di eccitazione*:

$$\Pi := \frac{d\mathcal{P}_{ass}}{d\tau} = \sum_n \Pi(E_n), \quad (5.18)$$

dove

$$\Pi(E_n) = \varepsilon^2 |\langle E_n|\hat{m}(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\tau) e^{-i(E_n-E_0)\Delta\tau} G_+(\Delta\tau). \quad (5.19)$$

è il *tasso di eccitazione* verso il singolo stato $|E_n\rangle$.

³Si noti come sia utile aver adottato la visuale di Heisenberg per $\hat{m}$.

È facile verificare (vedi sotto) che le traiettorie di un rivelatore inerziale e di uno uniformemente accelerato generano situazioni di equilibrio come quelle descritte nella precedente osservazione. Basterebbe quindi valutare (5.18) nei due casi (come ad esempio in [21] o in [22]) per ricavare — in un modo un po' indiretto — l'effetto Unruh.

Tuttavia preferisco introdurre prima un modello di rivelatore di particelle più generale, partendo dalla definizione del suo tasso di eccitazione, e svolgere i calcoli in quel contesto. Inoltre per semplificare il calcolo della funzione di Wightman, nel resto della successiva sezione supporremo di lavorare con un campo $\hat{\phi}$ *privo di massa*.

5.2 Rivelatori di particelle

Il problema della realizzazione di un *rivelatore di particelle* ideale ha una lunga storia, già nel 1900 Planck [23] studiò il tasso di assorbimento di energia (proveniente da un campo di radiazione stocastica) di un oscillatore armonico di frequenza ω carico. Il risultato che trovò è che questo dipende dalla potenza del “rumore” nel campo - ossia dal grado delle sue fluttuazioni. Nel caso di un campo scalare ϕ , ciò esprime che il tasso d'assorbimento energetico del rivelatore è dato da

$$\Pi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \langle \phi(t) \phi(0) \rangle \rangle, \quad (5.20)$$

dove $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ indica la media d'insieme. Se denotiamo con $N(\omega)$ la densità dei modi normali per intervallo di frequenza unitario, dal teorema di Wiener-Khinchin abbiamo che lo *spettro di potenza del campo fluttuante* è $N(\omega)\Pi(\omega)$.

Nel caso quantistico è possibile costruire un rivelatore ideale in modo analogo: un punto materiale con uno spettro di assorbimento dato da

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \psi | \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(0) | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (5.21)$$

dove $|\psi\rangle$ è lo stato in cui si trova il sistema campo e $\hat{\phi}$ l'operatore di campo. Il modello che possiamo considerare è di fatto quello di un singolo atomo, inizialmente nel suo stato fondamentale, e accoppiato debolmente col campo scalare.

Osservazione 5.2.1. Si noti che un rivelatore non rileva tanto la presenza di particelle, quanto lo spettro delle fluttuazioni del vuoto.

Bisogna prestare particolare attenzione al moto del rivelatore; se infatti questo è inerziale il processo di misurazione avviene nel sistema di riferimento in cui esso è a riposo. In questo caso possiamo considerare t , senza ambiguità, come la coordinata temporale di $\mathcal{M}^4$ e $\omega = u^a k_a$ la frequenza — dove u^a è la quadrivelocità del rivelatore e k_a il vettore di propagazione del campo.

Siamo però interessati a trattare anche il caso in cui il rivelatore è accelerato da una forza esterna, che può influenzare l'oggetto da un punto di vista cinematico — attraverso un fattore universale (analogo a quello presente nell'effetto Doppler)

– oppure modificandone la sensibilità alterando le sue capacità di misura. Senza perdita di generalità possiamo supporre che quest'ultima eventualità, che dipende dalla struttura interna del rivelatore, non si verifichi (in caso contrario sarebbe necessario introdurre un fattore di correzione) supponendo quindi di lavorare con un oggetto *robusto* e sufficientemente piccolo.

Per quanto concerne invece il fattore di conversione universale per l'accelerazione non ci sono evidenti soluzioni, bisogna ricorrere ad un'ipotesi fisica, tipica in relatività e per cui c'è una forte evidenza sperimentale:

Assioma Fisico 7. Il tempo misurato da un rivelatore di particelle robusto in moto arbitrario è il tempo proprio lungo la sua linea universo.

Questo perciò implica che la frequenza osservata dipende dal moto del rivelatore.

5.3 Comportamento di un rivelatore accelerato nello spaziotempo di Minkowski

In questa parte calcoleremo lo spettro delle fluttuazioni registrato lungo la linea universo di un rivelatore uniformemente accelerato, vedremo quindi che il rivelatore assorbe energia come se ricevesse una radiazione termica. Tengo a precisare sin d'ora che il procedimento mostrato non dipende da una diversa quantizzazione - metodo che si può usare e che vedremo più avanti - ma si basa su quella fatta a partire dai modi (3.12) e il vuoto $|0_M\rangle$ invariante per trasformazioni di Poincaré.

5.3.1 Calcolo dello spettro d'assorbimento di un rivelatore uniformemente accelerato

Consideriamo due rivelatori di particelle, del tipo presentato nella sezione precedente, uno in moto rettilineo uniforme mentre l'altro è uniformemente accelerato in $\mathcal{M}^4$. Con l'intento di confrontare i risultati ottenuti, consideriamo la funzione di Wightman per le fluttuazioni di punto zero di un campo scalare reale $\langle 0_M | \hat{\phi}(\underline{x}) \hat{\phi}(\underline{x}') | 0_M \rangle$. Utilizzando (2.69), (2.72) e il teorema dei residui per valutare l'integrale si ottiene

$$\langle 0_M | \hat{\phi}(\underline{x}) \hat{\phi}(\underline{x}') | 0_M \rangle = -\frac{1}{4\pi^2} \left[(t - t' - i\epsilon)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \right]^{-1}, \quad (5.22)$$

dove $\underline{x} = (t, x, y, z)$ e $\underline{x}' = (t', x', y', z')$ sono due punti di $\mathcal{M}^4$ con componenti spaziali $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ rispettivamente; mentre $\epsilon > 0$ è un piccolo parametro usato per eliminare le singolarità dall'asse reale.

Per il rivelatore inerziale, come già anticipato, il calcolo è svolto nel sistema di riferimento in cui esso è in quiete. In tal caso, sempre applicando il teorema dei residui, abbiamo

$$\Pi_{inerziale}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt e^{-i\omega t}}{(t - i\epsilon)^2} = -\frac{\omega}{2\pi} \theta(-\omega), \quad (5.23)$$

dove θ è la funzione a scalino (2.65).

Poiché $\Pi_{inerziale}$ contiene solamente frequenze negative, se il rivelatore parte con l'energia di punto zero questa, potendo soltanto scendere assorbendo frequenze negative, resterà invariata. Nel caso invece in cui parta in uno stato eccitato, le fluttuazioni del campo potrebbero portare a una sua progressiva perdita di energia.

Ripetiamo ora il ragionamento per il rivelatore uniformemente accelerato, parametrizzando la sua linea universo con le coordinate di Rindler:

$$t = \alpha^{-1} \sinh \rho, \quad x = \alpha^{-1} \cosh \rho, \quad y = y, \quad z = z, \quad (5.24)$$

con α l'accelerazione propria e $\tau = \alpha^{-1} \rho$ il tempo proprio. Sostituendo questa parametrizzazione nell'espressione (5.22) otteniamo la funzione di Wightman del vuoto di Poicaré espressa in funzione del tempo proprio di un osservatore accelerato:

$$\langle 0_M | \hat{\phi}(\rho) \hat{\phi}(0) | 0_M \rangle = - \frac{\alpha^2}{16\pi^2 \sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} - i\epsilon \right)}, \quad (5.25)$$

dove $\hat{\phi}(\rho)$ denota $\hat{\phi}$ valutato in $\underline{x}(\rho) = (\rho, \xi, y, z)$.

Da (5.25) si calcola infine lo spettro energetico delle fluttuazioni lungo la linea universo iperbolica:

$$\Pi_{accelerato}(\omega) = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \frac{\alpha e^{-i\omega\rho/\alpha}}{4 \sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} - i\epsilon \right)}. \quad (5.26)$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, usiamo ancora il teorema dei residui; consideriamo la funzione

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{16\pi^2} \frac{e^{-i\omega\rho/\alpha}}{\sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right)} \quad (5.27)$$

e integriamola lungo il contorno mostrato in figura 5.1. L'integrale lungo il contorno

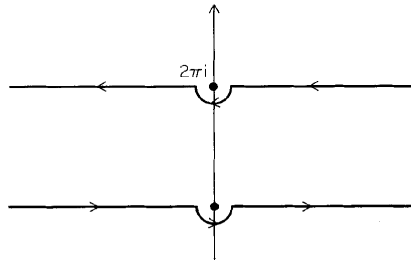


Figura 5.1: Contorno di integrazione.

inferiore dà un contributo di $\Pi(\omega)$, mentre quello superiore di $-\exp(2\pi\omega/\alpha) \Pi(\omega)$; la somma di queste quantità è associata al residuo di $f(\rho)$ in $\rho = 0$. Perciò si ha infine

$$\Pi_{accelerato}(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \frac{\omega}{e^{2\pi\alpha} - 1}. \quad (5.28)$$

È emerso quindi un fattore di Planck $(e^{2\pi\alpha} - 1)^{-1}$ il quale, come osservato da Unruh [3], indica che l'equilibrio fra il rivelatore accelerato e il campo ϕ nello stato di vuoto

$|0_M\rangle$ è lo stesso che si avrebbe per un rivelatore inerziale immerso in un “bagno” di radiazione termica alla temperatura

$$T = \frac{\hbar \alpha}{2\pi k_B c}, \quad (5.29)$$

dove in quest’ultima abbiamo reintrodotta le costanti universali per estetica e per ripristinare la dimensionalità. Si noti che la temperatura osservata dipende dall’accelerazione propria ma è indipendente dalla velocità.

Osservazione 5.3.1. Quest’ultimo risultato è noto anche come *effetto Unruh*. Esso si poteva derivare anche considerando le funzioni di Green termiche di un osservatore inerziale — come fatto da Dowker [24], [25]. In tal modo si dimostra che le funzioni di Green (del vuoto) per un rivelatore accelerato, coincidono con le funzioni di Green termiche del rivelatore inerziale.

Spesso in questo contesto si asserisce che il rivelatore accelerato “vede una radiazione termica” ([26], [3]), in quanto chiaramente assorbe energia; tuttavia il campo $\hat{\phi}$ è nello stato di vuoto inerziale. Cerchiamo quindi un’interpretazione fisica che motivi questo aumento di energia nel rivelatore e che apparentemente si potrebbe attribuire alla presenza di particelle ‘fittizie’, ovvero non osservate da un rivelatore inerziale.

5.3.2 Interpretazione fisica dell’effetto Unruh

Per i nostri scopi sarà utile analizzare un po’ più nel dettaglio il comportamento fisico del rivelatore, o meglio i suoi gradi di libertà interni. Come osservato da Sciamia et al. in [27], possiamo considerare lo stato dell’atomo rivelatore come interamente determinato dall’equilibrio di due diversi processi: l’*emissione* spontanea di energia causata dalle fluttuazioni del momento di dipolo dell’atomo e l’*assorbimento* dovuto alle fluttuazioni dell’energia di punto zero del campo quantistico.

Analizzando il sistema accoppiato come in [28] è possibile dimostrare che esiste una scelta di variabili tale che, se il rivelatore è in uno stato eccitato, allora le fluttuazioni quantistiche del vuoto provocano un’emissione stimolata, da parte del momento di dipolo dell’atomo, la quale si aggiunge a quella spontanea [29].

Nel caso però in cui il rivelatore sia nello stato fondamentale, non potendo avvenire emissione stimolata, le fluttuazioni di punto zero del campo e quelle provocate dall’atomo per emissione spontanea si *bilanciano* — in completa analogia con una situazione di equilibrio termico. Perciò, come già osservato, un rivelatore allo stato fondamentale permane nello stato fondamentale.

Se il rivelatore è accelerato però questo bilancio viene a mancare: da un lato la funzione di autocorrelazione (quella di Wightman) del minimo segnale rilevabile è la stessa di prima e sempre in funzione del tempo proprio $\alpha^{-1}\rho$, d’altro canto la funzione di autocorrelazione *rilevante*, quella del campo $\hat{\phi}$, utilizza il tempo proprio lungo la *geodetica* (segmento) che unisce il punto $\underline{x}'$ con $\underline{x}(t)$ che varia lungo la linea universo iperbolica.

Riassumendo, sebbene talvolta sia suggestivo affermare che un ricevitore accelerato si vede immerso in una radiazione termica analoga a quella di un corpo nero,

ciò non deve essere inteso come indice del fatto che siano rilevate particelle. Come già sottolineato, il rivelatore non osserva tanto particelle quanto lo spettro delle fluttuazioni del vuoto.

Questa spiegazione appare in parziale contrasto col fatto che il tensore energia-momento-sforzi, che in qualche modo misura in modo “universale” (indipendente dalle coordinate) l’attività del vuoto, ha un valore di aspettazione nullo nel sistema inerziale, i.e. $\langle 0_M | : \hat{T}_{ab} : | 0_M \rangle = 0$, e dunque in ogni sistema di coordinate: da dove proviene quindi l’energia che eccita il rivelatore? La risposta è “dal lavoro compiuto dalla forza che mantiene in accelerazione l’atomo”: infatti, durante il moto non inerziale, l’emissione stimolata di quanti si oppone al movimento (come attrito) e, per mantenere α costante, deve essere bilanciata dalla forza esterna.

D’altro canto, come sottolineato da Unruh e Wald in [30], l’accelerazione del rivelatore è accompagnata da un’eccitazione del campo rispetto ad un osservatore inerziale, cosa che avevamo già ricavato nel caso del rivelatore di Unruh–DeWitt nella sezione 5.1.

5.4 Un diverso approccio: il vuoto di Fulling

Già nel secondo capitolo abbiamo sottolineato come la scelta dei modi fondamentali in cui scomporre il campo dia la possibilità di scegliere lo spazio di Fock degli stati del sistema. L’idea di Fulling [2] fu quella di sfruttare questo fatto e partire da un insieme completo di modi, definito rispetto al vettore di Killing che genera le traslazioni temporali nelle coordinate di Rindler,⁴ e derivare così in un modo alternativo i risultati della precedente sezione.

La differenza con quanto già fatto è che, invece di considerare la consueta quantizzazione ed analizzare i risultati misurati da un rivelatore accelerato, qui introdurremo un vuoto che è “esso stesso accelerato”.

5.4.1 I modi di Rindler

Iniziamo a scrivere una parametrizzazione rispetto al cuneo destro di Rindler. Per farlo è conveniente introdurre, nel quadrante $x - t$, le coordinate di Lass (η, ξ, y, z) :

$$\begin{cases} t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \\ x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \\ y = y \\ z = z, \end{cases} \quad (5.30)$$

dove a è una costante positiva. Ciò è particolarmente comodo in quanto, poiché le linee universo con ξ e $\mathbf{x}_\perp := (y, z)$ costanti hanno tempo ed accelerazione propria pari a $e^{a\xi}\eta$ e $ae^{-a\xi}$, in particolare la linea universo $\xi = 0$, $\mathbf{x}_\perp = \text{cost}$ ha accelerazione propria a . Ricordiamo poi che la metrica di Minkowski in queste nuove coordinate diventa

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2) - dy^2 - dz^2. \quad (5.31)$$

⁴Nelle notazioni del quarto capitolo, ∂_T .

Scriviamo l'equazione di un campo scalare massivo in $\mathcal{R}$ rispetto a queste coordinate. Innanzitutto dalla (5.31) si ricavano le componenti non nulle della metrica e il suo determinante: $\sqrt{-g} = g_{\eta\eta} = e^{2a\xi}$, $g_{\xi\xi} = -e^{2a\xi}$, $g_{yy} = g_{zz} = -1$; sostituendo in (3.4) otteniamo

$$\square\phi = e^{-2a\xi} \left[\partial_\eta^2 - \partial_\xi^2 - e^{2a\xi} (\partial_y^2 + \partial_z^2) \right] \phi \quad (5.32)$$

e l'equazione di Klein-Gordon diventa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + e^{2a\xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - e^{2a\xi} m^2 \right] \phi. \quad (5.33)$$

Col solito metodo della separazione delle variabili cerchiamo soluzioni (a frequenza positiva) proporzionali a $e^{-i\omega\eta}$, questa scelta equivale a cercare un vuoto statico per lo spazio di Rindler rispetto alla traslazione lungo i tempi η . Poiché la (5.30) lascia invariato il vettore delle coordinate trasverse (y, z) , è lecito assumere anche una dipendenza da $\mathbf{x}_\perp$ del tipo $e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}$, cerchiamo quindi modi a frequenza positiva del tipo

$${}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(\eta, \xi, \mathbf{x}_\perp) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega}} \psi_{\omega, k_\perp}(\xi) \exp[-i\omega\eta + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp]. \quad (5.34)$$

Sostituendo quest'ultima nella (5.33) ricaviamo l'equazione differenziale che soddisfano le componenti $\psi_{\omega, k_\perp}$:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + e^{2a\xi} (\omega^2 - k_\perp^2 - m^2) \right] \psi_{\omega, k_\perp} = 0. \quad (5.35)$$

Uno studio qualitativo di quest'ultima ci permette di concludere che le soluzioni fisicamente rilevanti tendono a zero per $\xi \rightarrow +\infty$, mentre oscillano come $e^{\pm\omega\xi}$ per $\xi \rightarrow -\infty$ (si noti infatti che (5.35) è analoga a un'equazione di Shrödinger indipendente dal tempo e con potenziale esponenziale).

Siamo quindi giustificati a imporre opportune condizioni di normalizzazione:

Lemma 5.4.1. *Supponiamo che, per $\xi < 0$ e $|\xi| \gg 1$, le $\psi_{\omega, k_\perp}(\xi)$ soddisfino*

$$\psi_{\omega, k_\perp}(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{i(\omega\xi + \gamma(\omega))} + e^{-i(\omega\xi + \gamma(\omega))} \right], \quad (5.36)$$

dove $\gamma(\omega)$ è una costante reale. Allora vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \psi_{\omega, k_\perp}^*(\xi) \psi_{\omega', k_\perp}(\xi) = \delta(\omega - \omega'). \quad (5.37)$$

Dimostrazione. Sia $A > 0$ fissato, definiamo $S_A(\omega, \omega') := \int_{-A}^{\infty} d\xi \psi_{\omega, k_\perp}^* \psi_{\omega', k_\perp}$. Dato che le ψ soddisfano (5.35) e (5.4.1) si ha

$$(\omega^2 - \omega'^2) S_A(\omega, \omega') = \left[\psi_{\omega', k_\perp}(\xi) \frac{d\psi_{\omega, k_\perp}^*}{d\xi} - \psi_{\omega, k_\perp}^*(\xi) \frac{d\psi_{\omega', k_\perp}}{d\xi} \right]_{\xi=-A} \quad (5.38)$$

Sempre grazie a (5.4.1), per $\xi < 0$ e $|\xi| \gg 1$ vale

$$(\omega^2 - \omega'^2)S_A(\omega, \omega') \approx \frac{1}{\pi} \left[(\omega - \omega') \sin((\omega + \omega')A - \gamma(\omega) - \gamma(\omega')) + \right. \quad (5.39)$$

$$\left. + (\omega + \omega') \sin((\omega - \omega')A - \gamma(\omega) + \gamma(\omega')) \right]. \quad (5.40)$$

Infine siccome $\frac{\sin(hA)}{h}$ converge debolmente a $\pi\delta(h)$ si conclude:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \psi_{\omega, k_\perp}^* \psi_{\omega, k_\perp} = \lim_{A \rightarrow +\infty} S_A(\omega, \omega') = \delta(\omega - \omega'). \quad (5.41)$$

□

Perciò grazie al lemma 5.4.1 le soluzioni (5.34) soddisfano le condizioni di normalizzazione

$$\left({}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}, {}^R v_{\omega', \mathbf{k}'_\perp} \right) = \delta(\omega - \omega') \delta^{(3)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \quad \left({}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^*, {}^R v_{\omega', \mathbf{k}'_\perp} \right) = 0, \quad (5.42)$$

rispetto al prodotto di Klein-Gordon definito sulle ipersuperfici di Cauchy $\eta = \text{cost.}$

Teorema 5.4.2. *Le soluzioni $\psi_{\omega, k_\perp}(\xi)$ della (5.33) soddisfacenti la condizione di normalizzazione (5.36) sono*

$$\psi_{\omega, k_\perp}(\xi) = \sqrt{\frac{2\omega \sinh(\pi\omega/a)}{\pi^2 a}} K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right), \quad (5.43)$$

dove K_ν è la funzione di McDonald e abbiamo posto $\kappa := \sqrt{k_\perp^2 + m^2}$.

Dimostrazione. Come prima cosa operiamo il cambio di variabile

$$\zeta := \frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \quad (5.44)$$

nell'equazione (5.35), ottenendo così

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - 1 + \frac{\omega^2}{a^2 \zeta^2} \right) \psi_{\omega, k_\perp} = 0. \quad (5.45)$$

Notiamo che quest'ultima è un'equazione di Bessel modificata con indice $i\omega/a$. Siccome stiamo cercando soluzioni con comportamento asintotico del tipo (5.36), abbiamo che queste sono della forma

$$\psi_{\omega, k_\perp}(\xi) = A_{\omega, k_\perp} K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right), \quad (5.46)$$

dove $A_{\omega, k_\perp}$ è una costante di integrazione [31]. Ricordiamo che la funzione di McDonald è definita come

$$K_\nu(s) := \frac{\pi i^{-\nu} J_\nu(is) - i^\nu J_{-\nu}(is)}{2 \sin(\nu\pi)}, \quad (5.47)$$

e per la funzione di Bessel $J_\nu(s)$ vale, per piccoli $|s|$, la stima (vedi [32])

$$J_\nu(s) \approx \frac{(s/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (5.48)$$

Da ciò segue che

$$K_{i\frac{\omega}{a}}(s) \approx \frac{i\pi}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \left[\frac{(s/2)^{i\omega/a}}{\Gamma(1+i\omega/a)} - \frac{(s/2)^{-i\omega/a}}{\Gamma(1-i\omega/a)} \right] \quad \text{per } |s| \ll 1. \quad (5.49)$$

Infine usando

$$|\Gamma(1+i\omega/a)|^2 = \Gamma(1+i\omega/a) \Gamma(1-i\omega/a) \quad (5.50)$$

$$= \frac{i\omega}{a} \Gamma(i\omega/a) \Gamma(1-i\omega/a) = \frac{\pi\omega}{a \sinh(\pi\omega/a)}, \quad (5.51)$$

la (5.49) diventa

$$K_{i\frac{\omega}{a}}(s) \approx \sqrt{\frac{\pi a}{\omega \sinh(\pi\omega/a)}} \left[e^{iC} \left(\frac{s}{2} \right)^{i\omega/a} + \text{c.c.} \right], \quad (5.52)$$

dove C è una costante reale. Infine confrontando la (5.52) con la (5.36), si ha la tesi. $\square$

Sostituendo la (5.43) nella (5.34) si ricavano i *modi destri di Rindler* a frequenza positiva:

$${}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(\eta, \xi, \mathbf{x}_\perp) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a}} K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right) e^{-i\omega\eta + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} & \text{in } \mathcal{R} \\ 0 & \text{in } \mathcal{L} \end{cases} \quad (5.53)$$

che possiamo estendere anche nel cuneo di sinistra, imponendo semplicemente che ivi si annullino, cosicché l'equazione di campo in $\mathcal{L}$ sia banalmente soddisfatta.

5.4.2 Il vuoto di Fulling

Possiamo ora procedere con la quantizzazione, sviluppando la restrizione di $\hat{\phi}$ a $\mathcal{R}$ nei modi (5.53) (che si dimostra essere un insieme completo nel cono $\mathcal{R}$ [22]) introducendo, come al solito, degli opportuni operatori di creazione e distruzione

$$\hat{\phi}(\eta, \xi, \mathbf{x}_\perp) = \int_0^{+\infty} d\omega \int d^2 \mathbf{k}_\perp \left({}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp} {}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(\eta, \xi, \mathbf{x}_\perp) + {}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^\dagger {}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^*(\eta, \xi, \mathbf{x}_\perp) \right). \quad (5.54)$$

Inoltre le (5.42) impongono per gli operatori di creazione e distruzione le relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} \left[{}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}, {}^R \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'_\perp}^\dagger \right] &= \delta(\omega - \omega') \delta^{(3)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \\ \left[{}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}, {}^R \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'_\perp} \right] &= 0, \quad \left[{}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^\dagger, {}^R \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'_\perp}^\dagger \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Questo completa la quantizzazione rispetto a un osservatore destro di Rindler, tuttavia per avere una descrizione completa è necessario ripeterla anche per un osservatore nel cuneo di sinistra. In questo caso le coordinate $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, y, z)$ da introdurre sono

$$\begin{cases} t = a^{-1} e^{a\bar{\xi}} \sinh(a\bar{\eta}) \\ x = -a^{-1} e^{a\bar{\xi}} \cosh(a\bar{\eta}) \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad (5.56)$$

Essendo il procedimento completamente analogo i modi di Rindler sinistri a frequenza positiva si possono ottenere da quelli destri (5.53) sostituendo η con $\bar{\eta}$ e ξ con $\bar{\xi}$:

$${}^L v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \mathbf{x}_\perp) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ \sqrt{\frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a}} K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\bar{\xi}}\right) e^{-i\omega\bar{\eta} + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases} \quad (5.57)$$

Possiamo perciò quantizzare ϕ sull'insieme formato dai due coni di Rindler

$$\hat{\phi} = \int_0^{+\infty} d\omega \int d^2 \mathbf{k}_\perp \left({}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp} {}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp} + {}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^\dagger {}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^* + {}^L \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp} {}^L v_{\omega, \mathbf{k}_\perp} + {}^L \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^\dagger {}^L v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^* \right), \quad (5.58)$$

dove ${}^L \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^\dagger$ e ${}^L \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp}$ sono operatori di creazione e distruzione, anch'essi soddisfacenti (5.55).

Definizione 5.4.3. Lo stato $|0_F\rangle$ annichilito da ogni operatore di distruzione (destro o sinistro), ossia

$${}^R \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp} |0_F\rangle = 0 \quad \text{e} \quad {}^L \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}_\perp} |0_F\rangle = 0, \quad \text{per ogni } \omega \text{ e } \mathbf{k}_\perp, \quad (5.59)$$

è detto *vuoto di Fulling*.

Come descritto nel secondo capitolo, a partire da $|0_F\rangle$ è possibile costruire il relativo spazio $\mathcal{F}_0$ e quindi lo spazio di Fock rispetto a un osservatore di Rindler.

5.4.3 Calcolo dei coefficienti di Bogoliubov

Procediamo ora ad esplicitare la relazione fra il vuoto di Poincaré $|0_M\rangle$ e quello di Fulling $|0_F\rangle$. In tal modo sarà possibile, come anticipato, ricavare una derivazione alternativa dell'effetto Unruh.

In questa sezione ci occuperemo infatti del calcolo dei coefficienti di Bogoliubov che determinano il cambio di coordinate da uno spazio di Fock all'altro.

Assumiamo per il momento che ${}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}$ e ${}^L v_{\omega, \mathbf{k}_\perp}$ siano i modi di Rindler estesi (in qualche modo) a tutto lo spaziotempo di Minkowski. Utilizzando la completezza delle soluzioni piane (3.12) è possibile scrivere

$${}^R v_{\omega, \mathbf{k}_\perp} = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left({}^R \alpha_{\omega, k_x, \mathbf{k}_\perp} e^{ik_x - i\omega_{\mathbf{k}} t} + {}^R \beta_{\omega, k_x, \mathbf{k}_\perp} e^{-ik_x + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right), \quad (5.60)$$

$${}^L v_{\omega, \mathbf{k}_\perp} = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left({}^L \alpha_{\omega, k_x, \mathbf{k}_\perp} e^{ik_x - i\omega_{\mathbf{k}} t} + {}^L \beta_{\omega, k_x, \mathbf{k}_\perp} e^{-ik_x + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right), \quad (5.61)$$

dove abbiamo osservato che i coefficienti fra diversi $\mathbf{k}_\perp$ sono nulli. Utilizzando la (3.33) e l'ortonormalità dei modi $u_{\mathbf{k}}$ (3.15) si ha

$${}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \delta(0) = \left(u_{\mathbf{k}}, {}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp}\right), \quad {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \delta(0) = \left(u_{\mathbf{k}}^*, {}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp}\right), \quad (5.62)$$

dove la delta deriva dalla nostra scelta di non far dipendere i coefficienti di Bogoliubov da $\mathbf{k}_\perp$ (di fatto è questa che definisce l'estensione dei modi di Rindler a tutto $\mathcal{M}^4$ che stiamo usando). La sua comparsa non deve preoccuparci in quanto è legata a una divergenza infrarossa dovuta all'integrazione su $\mathbb{R}^2$ rispetto $\mathbf{x}_\perp$, il "problema" è quindi risolvibile introducendo condizioni di periodicità e considerando lo spazio come un cubo (si veda la parte finale dell'osservazione 3.4.1).

Osservazione 5.4.4. La relazione fra (η, ξ) e (t, x) data da (5.30) è la medesima che intercorre, vedi (5.56), fra $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ e (t, x) , perciò ${}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(t, x, \mathbf{x}_\perp) = {}^Lv_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(t, -x, \mathbf{x}_\perp)$. Ne segue che

$${}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} = {}^L\alpha_{\omega,-k_x,\mathbf{k}_\perp}, \quad {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} = {}^L\beta_{\omega,-k_x,\mathbf{k}_\perp}. \quad (5.63)$$

Da questa osservazione è chiaro come ci basti concentrarci sui coefficienti destri; inoltre per procedere col calcolo ci sarà utile studiare il comportamento delle soluzioni sull'orizzonte di Killing futuro (siccome i modi destri sono nulli in $\mathcal{L}$), i.e. $t = z$, $t > 0$. In tal modo è possibile ottenere un integrale più semplice per calcolare il prodotto di Klein-Gordon, sfruttando il fatto che quest'ultimo non dipende dalla superficie di Cauchy in cui lo si calcola. Si ha

$${}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \rightarrow \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left({}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - k_x)V/2} + {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - k_x)V/2} \right), \quad (5.64)$$

dove ∂_V è il vettore normale all'orizzonte futuro nelle coordinate ritardate (4.28). Inoltre, utilizzando l'approssimazione (5.49) per la funzione di Bessel modificata, abbiamo

$${}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} \frac{i e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{4\pi \sqrt{a \sinh(\pi\omega/a)}} \left(\frac{(\kappa/a)^{i\omega/a} e^{-i\omega u}}{\Gamma(1 + i\omega/a)} - \frac{(\kappa/a)^{-i\omega/a} e^{-i\omega v}}{\Gamma(1 - i\omega/a)} \right), \quad (5.65)$$

dove ricordiamo di aver posto $\kappa := \sqrt{k_\perp^2 + m^2}$ e le coordinate u, v sono quelle *nulle*, precedentemente definite come

$$u := \eta - \xi, \quad v := \eta + \xi \quad (5.66)$$

per cui si ha $e^\eta = e^{u/2} e^{v/2}$.

Siccome all'orizzonte futuro $\eta \rightarrow +\infty$ da quest'ultima si ha che anche $u \rightarrow +\infty$; dunque il primo termine nella parentesi della (5.65) asintoticamente oscilla ed è limitato. Asintoticamente perciò

$${}^Rv_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \approx - \frac{i(\kappa/a)^{-i\omega/a}}{4\pi \sqrt{a \sinh(\pi\omega/a)} \Gamma(1 - i\omega/a)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\omega v} \quad \text{per } \eta \rightarrow +\infty. \quad (5.67)$$

D'altro canto le onde piane nell'orizzonte futuro sono

$$u_{\mathbf{k}} \approx N_{\mathbf{k}} e^{i(k_x - \omega_{\mathbf{k}})V/2}, \quad (5.68)$$

dove gli $N_{\mathbf{k}}$ sono coefficienti di normalizzazione.

Siamo ora pronti per calcolare i coefficienti ${}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp}$. Esplicitiamo la (5.62):

$${}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \delta(0) = i \int_{\Sigma} \sqrt{-\gamma} \left[u_{\mathbf{k}} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_a {}^R v_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \right] d\Sigma^a, \quad (5.69)$$

dove Σ è una ipersuperficie $\eta = \text{cost}$ con vettore normale $e^{-a\xi} \partial_\eta$ e determinante della metrica indotta $\sqrt{-\gamma} = -e^{2a\xi}$. Come detto usiamo il “trucco” di valutare l’integrale sull’orizzonte futuro dove ∂_η si riduce a $2aV \partial_V$ e $d\xi$ con $\frac{dV}{2aV}$, i.e.

$$\partial_a \sqrt{-\gamma} d\Sigma^a = d\xi \partial_\eta \longrightarrow dV \partial_V. \quad (5.70)$$

usando (5.69) e le considerazioni precedenti abbiamo

$${}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} = i \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} dV \left[u_{\mathbf{k}} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_V {}^R v_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \right] \quad (5.71)$$

$$= 2\pi i \int_0^{+\infty} dV \left[u_{\mathbf{k}}^* \underbrace{\partial_V ({}^R v_{\omega,\mathbf{k}_\perp})}_{=0} - \partial_V (u_{\mathbf{k}}^*) {}^R v_{\omega,\mathbf{k}_\perp} \right] \quad (5.72)$$

$$= \frac{i(\kappa/a)^{-i\omega/a} (k_x - \omega_{\mathbf{k}})}{4\sqrt{a} \sinh(\pi\omega/a) \Gamma(1 - i\omega/a)} \int_0^{+\infty} dV \underbrace{e^{-i\omega v}}_{(aV)^{-i\omega/a}} e^{-i(k_x - \omega_{\mathbf{k}})V/2} \quad (5.73)$$

$$= \frac{e^{\pi\omega/2a}}{\sqrt{4\pi a} \omega_{\mathbf{k}} \sinh(\pi\omega/a)} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_x}{\omega_{\mathbf{k}} - k_x} \right)^{-i\omega/2a}, \quad (5.74)$$

dove per calcolare l’ultimo integrale è possibile considerarlo come il limite di $\Gamma(\zeta)$ per $\Re(\zeta) \rightarrow 0$. Analogamente è possibile ottenere i coefficienti

$${}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} = - \frac{e^{-\pi\omega/2a}}{\sqrt{4\pi a} \omega_{\mathbf{k}} \sinh(\pi\omega/a)} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_x}{\omega_{\mathbf{k}} - k_x} \right)^{-i\omega/2a}. \quad (5.75)$$

Siamo pronti a questo punto per descrivere “cosa vede” un osservatore di Rindler (supponiamolo destro) nelle due costruzioni. Utilizzando (3.34) è possibile scrivere gli operatori di creazione e distruzione di Rindler rispetto a quelli di Minkowski:

$${}^R\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}_\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \left({}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} - {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (5.76)$$

e

$${}^R\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \left({}^R\alpha_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right). \quad (5.77)$$

Utilizziamo queste relazioni per calcolare il valore d’aspettazione rispetto a $|0_M\rangle$ dell’operatore ${}^R\hat{N}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}$, ossia quello che “conta” il numero di particelle di Rindler relative al modo ${}^R v_{\omega,\mathbf{k}_\perp}$. Si ha

$$\langle 0_M | {}^R\hat{N}_{\omega,\mathbf{k}_\perp} | 0_M \rangle = \langle 0_M | {}^R\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}^\dagger {}^R\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}_\perp} | 0_M \rangle \quad (5.78)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \left| {}^R\beta_{\omega,k_x,\mathbf{k}_\perp} \right| \langle 1_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{\varpi}{4\pi a} \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}, \quad (5.79)$$

il termine $\varpi := \int \frac{dk_x}{\omega_{\mathbf{k}}}$, che provoca divergenza infrarossa, è un integrale divergente che segue dall'aver usato modi non normalizzati. Tuttavia restringendo l'integrazione a un dominio finito è possibile dimostrare che la divergenza si elimina [21], [19].

Con la (5.79) si è dimostrato che il valore d'aspettazione nel vuoto di Minkowski del numero di quanti relativi a i diversi modi di Rindler segue la distribuzione di Einstein–Bose. L'osservatore di Rindler “vede” quindi $|0_M\rangle$ come un bagno termico di bosoni (particelle scalari) a temperatura

$$T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi k_B c}, \quad (5.80)$$

in pieno accordo con quanto visto nella sezione precedente.

5.5 Buchi neri

Accenniamo ora al caso della quantizzazione di un campo scalare in presenza di un buco nero. Ovviamente la trattazione non sarà molto approfondita (in quanto esula dagli scopi di questo elaborato) ed è volta solamente a delineare l'analogia con quanto trattato finora. Supporremo inoltre note alcune nozioni preliminari di relatività generale.

5.5.1 Spaziotempo di Kruskal

Supponendo di poter introdurre coordinate locali (spaziali) sferiche (r, θ, φ) , è possibile descrivere l'azione gravitazionale di un corpo a simmetria sferica di massa M attraverso la *metrica di Schwarzschild*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.81)$$

Quest'ultima possiede una singolarità in $r = 2M$ che però non corrisponde ad alcuna *singolarità di curvatura* e la cui interpretazione rimase in sospeso fino al 1960 [33].

In particolare ci si accorse che è possibile introdurre delle coordinate non singolari che prolungano analiticamente la varietà di Schwarzschild ($r > 2M$), comprendendo così anche la regione $r < 2M$. Per fare ciò è conveniente adottare le *coordinate di Kruskal*, e il risultato sarà quello di estendere lo spaziotempo di Schwarzschild a quello di Kruskal analogamente a come lo spazio di Minkowski è un'estensione di quello di Rindler.

Per ricollegarci a quanto esposto nel capitolo 4, supponiamo di lavorare con unità per cui $M = 1/4$ ed etichettiamo con T e R la coordinata temporale e radiale per la metrica di Schwarzschild (al posto di t e r). Così la (5.81) diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{2R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{1}{2R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.82)$$

avendo perciò spostato l'orizzonte a $R = 1/2$ come in (4.27). Con queste notazioni possiamo definire lo *spazio di Kruskal* attraverso la metrica

$$ds^2 = \frac{1}{2R e^{2R}} (dt^2 - dx^2) - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.83)$$

possono essere interpretate come regioni che si muovono con accelerazione propria costante (come fossero gli interni di un razzo illimitato). I quadranti II e IV invece rappresentano le regioni di Schwarzschild *interne* in cui la coordinata $R \in (0, \frac{1}{2})$ aumenta in II e diminuisce in IV. Inoltre, siccome qualsiasi linea universo entra in II (in futuro), tale regione è detta *buco nero*.

5.5.2 Teoria quantistica dei campi nello spaziotempo di un buco nero

Consideriamo ora un campo scalare privo di massa, definito nella regione di Schwarzschild esterna, la cui sezione è il primo quadrante in figura. Un insieme completo di soluzioni dell'equazione del campo scalare privo di massa

$$\square\phi = 0 \quad (5.87)$$

è quello formato dalle [27]

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega t} \vec{Q}_l(\omega|R) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (5.88)$$

$$\overleftarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega t} \overleftarrow{Q}_l(\omega|R) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (5.89)$$

dove abbiamo indicato con Y_{lm} le armoniche sferiche, mentre le Q sono funzioni radiali con comportamento asintotico:

$$\vec{Q}_l(\omega|R) \approx \begin{cases} \frac{1}{R} e^{i\omega R_*} + \frac{1}{R} \vec{A}_l(\omega) e^{-i\omega r_*}, & R \rightarrow 1/2 \\ \frac{1}{R} B_l(\omega) e^{i\omega R_*}, & R \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.90)$$

$$\overleftarrow{Q}_l(\omega|R) \approx \begin{cases} \frac{1}{R} B_l(\omega) e^{-i\omega R_*}, & R \rightarrow 1/2 \\ \frac{1}{R} e^{-i\omega R_*} + \frac{1}{R} \overleftarrow{A}_l(\omega) e^{i\omega r_*}, & R \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.91)$$

avendo posto $R_* := R + \frac{1}{2} \log(2R-1)$ la *coordinata di Regge-Weeler*. L'interpretazione fisica delle soluzioni è la seguente: le $\vec{u}$ sono modi che si propagano dall'orizzonte passato, mentre gli $\overleftarrow{u}$ partono dall'infinito $R = \infty$ (vedi figura 5.5.2).

A questo punto scegliendo un campo vettoriale di Killing rispetto a cui le (5.90), (5.91) siano autofunzioni a frequenza positiva si può procedere con la quantizzazione (costruendo il rispettivo spazio di Fock, stato di vuoto, etc). Si osservi di nuovo che a priori non vi è una scelta privilegiata, anzi diverse quantizzazioni sono adatte a descrivere situazioni fisiche distinte.

Facciamo qualche esempio (senza dimostrare nulla) per chiarire ulteriormente l'analogia con quanto descritto per l'effetto Unruh. Nella regione considerata imponendo diverse condizioni sui modi u si possono definire:

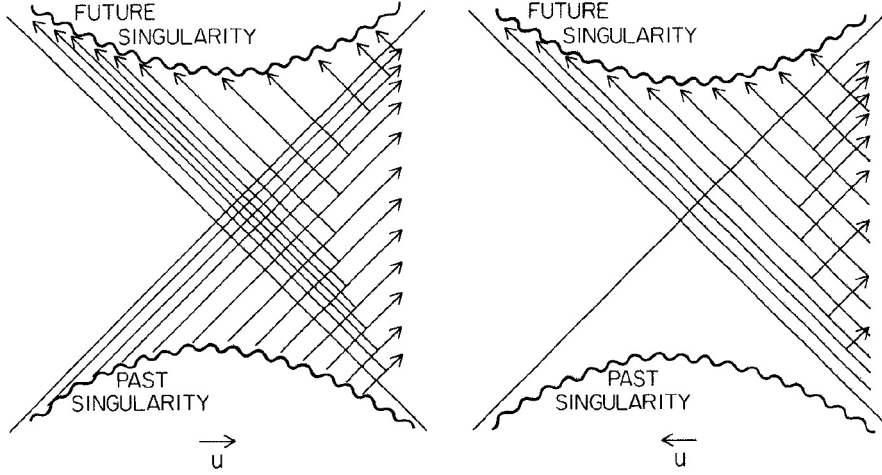


Figura 5.3: I modi uscenti $\vec{u}$ partono dall'orizzonte passato e vengono in parte riflessi, dalla curvatura gravitazionale, verso l'orizzonte futuro. I modi uscenti $\overleftarrow{u}$ invece partono da $R = \infty$ e sono diretti all'orizzonte futuro, resta anche qui una parte delle onde che viene riflessa all'indietro dalla curvatura.

- Il *vuoto di Boulware* $|0_B\rangle$ ottenuto imponendo che le $\vec{u}$ e $\overleftarrow{u}$ siano soluzioni a frequenza positiva rispetto al vettore ∂_t (rispetto a cui la regione di Schwarzschild esterna I è statica).
- Il *vuoto di Unruh* $|0_U\rangle$ invece è il vettore dello spazio di Fock ottenuto richiedendo che le $\overleftarrow{u}$ siano a frequenza positiva rispetto a ∂_t , mentre le $\vec{u}$ lo siano rispetto a U (definito dalla (4.28)).
- Infine per il *vuoto di Hartle-Hawking* $|0_H\rangle$ si richiede che le $\overleftarrow{u}$ e le $\vec{u}$ siano soluzioni a frequenza positiva rispettivamente per V e U .

È possibile calcolare gli operatori di diversi osservabili rispetto a questi stati, in particolare è possibile valutare la funzione di Wightman rispetto ai diversi vuoti. In tabella⁵ riportiamo il comportamento asintotico dei risultati del calcolo del tasso di eccitazione rispetto ai diversi stati

$$\Pi(\omega|R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \langle 0_* | \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(0) | 0_* \rangle dt. \quad (5.92)$$

	$R \rightarrow \frac{1}{2}$	$R \rightarrow \infty$
Boulware	$\frac{-\omega \theta(-\omega)}{2\pi(1 - \frac{1}{2R})}$	$-\frac{\omega}{2\pi} \theta(-\omega)$
Unruh	$\frac{\omega R}{\pi(2R - 1)[\exp(2\pi\omega/\kappa) - 1]}$	$\frac{1}{R^2} \frac{\sum (2l + 1) B_l(\omega) ^2}{8\pi\omega [\exp(2\pi\omega/\kappa) - 1]} - \frac{\omega}{2\pi} \theta(-\omega)$
Hartle-Hawking	$\frac{\omega R}{\pi(2R - 1)[\exp(2\pi\omega/\kappa) - 1]}$	$\frac{\omega}{2\pi [\exp(2\pi\omega/\kappa) - 1]}$

⁵Dove con $\theta(\cdot)$ abbiamo indicato la funzione a scalino e con κ la gravità superficiale sull'orizzonte.

Osserviamo quindi che $|0_B\rangle$ rende bene il concetto intuitivo di vuoto come “assenza di materia” per grandi valori di R , d’altro canto però non è una quantizzazione conveniente per lavorare in prossimità dell’orizzonte degli eventi $R = 1/2$ dato che ivi il valore d’aspettazione di $\hat{T}^a_b$ diverge. Per il vuoto di Unruh si trova che $\langle 0_U | \hat{T}^a_b | 0_U \rangle$ è ben definito, rispetto ad un osservatore in caduta libera, sull’orizzonte futuro, ma non in quello passato. All’infinito invece questo vuoto corrisponde a un flusso uscente di radiazione di corpo nero alla temperatura $\frac{\kappa}{2\pi}$, che potrà essere identificata con la temperatura del buco nero.

Rispetto al vuoto di Hartle-Hawking il valore di $\langle \hat{T}^a_b \rangle$ si comporta bene, infatti è ben definito, rispetto a un sistema di riferimento in caduta libera, sia nell’orizzonte passato che futuro. Tuttavia per $R \rightarrow \infty$ esso corrisponde a una distribuzione normale di quanti alla temperatura del buco nero! Questa situazione corrisponde al buco nero in equilibrio rispetto a un mare di radiazione di corpo nero (equilibrio instabile in quanto il buco nero perde temperatura inversamente alla sua massa [34]).

Osservazione 5.5.1. Il vuoto di Unruh è perciò quello che meglio si adatta a descrivere la situazione del collasso gravitazionale di un corpo celeste massivo. Esistono tuttavia esempi in cui $|0_B\rangle$ e $|0_H\rangle$ sono più adatti ad approssimare la situazione fisica.

Un fatto interessante, nel nostro contesto, è come lo stato $|0_H\rangle$ si comporti rispetto agli stati di Boulware. Consideriamo un rivelatore di particelle che svolga le veci di quello di Unruh–DeWitt. Siccome l’effetto geometrico è dovuto alla struttura dello spaziotempo e non più alla cinematica, basta prendere una scatola a riposo e a distanza costante dal buco nero allo stato $|0_H\rangle$. Supponiamo poi che le pareti della scatola agiscano come un interruttore, ovvero che possano o meno mettere in contatto termico l’interno della scatola con l’ambiente.

Quando l’interno è ancora isolato termicamente, avendo supposto il rivelatore a riposo rispetto al tempo di Schwarzschild t , è possibile descrivere il campo all’interno con la quantizzazione di Boulware con buona approssimazione (potendo in questo caso trascurare le condizioni al contorno). Nel momento in cui rimettiamo il sistema in isolamento dopo averlo lasciato in contatto termico con l’esterno, all’interno si osserva un bagno di particelle di Boulware alla temperatura $T = \frac{\kappa}{2\pi}$.

Quindi, sebbene i contesti siano differenti, il vuoto di Hartle–Hawking si comporta rispetto agli stati di Boulware come quello di Poincaré $|0_M\rangle$ rispetto agli stati di Fulling (5.60)!

5.5.3 Accenno alla radiazione di Hawking

L’effetto Hawking, scoperto nel 1974 [35] (e ben esposto in [4]), descrive l’emissione di una radiazione termica di corpo nero da parte di un buco nero. L’importanza di questa scoperta, oltre alle sue dirette implicazioni, fu quella di incentivare gli studi sulla formulazione della teoria quantistica dei campi in spazitempi curvi.

Cerchiamo ora di esporre brevemente l’idea alla base della derivazione di questo effetto. Consideriamo un corpo a simmetria sferica che collassa su se stesso dando origine a un buco nero di Schwarzschild. Prima dell’implosione, nello spazio esterno la metrica è quella di Schwarzschild e per grandi R il vuoto di Boulware $|0_B\rangle$ è ben

approssimato da quello di Poincaré $|0_M\rangle$. Supponendo quindi che nello spaziotempo sia presente un campo scalare ϕ nello stato $|0_M\rangle$ (definito a grande distanza) e adottando la visuale di Heisenberg, si ha che anche dopo l'implosione lo stato di ϕ è invariato.

Tuttavia, i modi del campo diretti verso il centro del corpo celeste (durante l'implosione) vengono modificati: subiscono un blue-shift avvicinandosi e un red-shift allontanandosi (i due effetti però non si bilanciano data la situazione). Il risultato è che i modi a frequenza positiva variano e — analogamente a quanto accade per i modi di Rindler e $|0_M\rangle$ — calcolando i corrispondenti coefficienti di Bogoliubov, si misura asintoticamente uno spettro di corpo nero alla temperatura $\frac{\kappa}{2\pi}$ (vedi (5.79)).

Capitolo 6

Conclusioni

Abbiamo visto come un rivelatore costantemente accelerato misuri uno spettro di assorbimento energetico, analogo a quello che un osservatore inerziale calcola utilizzando i modi piani per descrivere un campo eccitato (con spettro termico). Coerentemente con questo, si è anche visto come sia possibile utilizzare una quantizzazione “solidale” al rivelatore accelerato, unitariamente non equivalente a quella solitamente utilizzata nello spazio di Minkowski, e come il vuoto di Poincaré $|0_M\rangle$ appaia uno stato contenente particelle (relative allo spazio di Fock costruito a partire dai *modi di Rindler*) alla stessa temperatura ricavata attraverso il primo procedimento.

Sebbene l'esistenza di diverse dimostrazioni sia un buon segno, molti fisici nutrono ancora dei dubbi sull'effetto Unruh [36]. Ad esempio in [37] gli autori sostengono che non sia possibile misurare l'effetto con gli attuali strumenti e procedure di misurazione, non solo a causa delle piccole scale su cui condurre gli esperimenti (dalla (5.80) la costante di proporzionalità fra α e T è dell'ordine di $10^{-21} kg s^2/m$), ma soprattutto poiché la misurazione dovrebbe essere effettuata in un sistema non inerziale — analogamente a un esperimento per rilevare la forza di Coriolis. Secondo questo articolo, l'effetto Unruh sarebbe semplicemente la formulazione di effetti ordinari rispetto ad una differente carta di coordinate e non un indizio per una “nuova fisica”.

Tuttavia, l'effetto si basa sulla possibilità di definire modi a frequenza positiva rispetto a due diversi vettori di Killing, i quali sono legati alle *simmetrie* dello spaziotempo, e quindi alla sua geometria *intrinseca*, non alla scelta di una carta. In altre parole, il fatto che per trattare l'effetto Unruh siano utilizzate coordinate di Rindler, non è indice del fatto che questo dipenda da esse. Semplicemente abbiamo usato la carta più conveniente per esprimere il vettore di Killing ∂_T dello spazio di Rindler, simmetria che esiste a prescindere dalle coordinate adottate!

L'effetto Unruh è quindi, in ultima analisi, il “semplice” risultato di due aspetti:

- a) In teoria quantistica dei campi, diversi vettori di Killing permettono di definire modi a frequenza positiva differenti;
- b) Nello spaziotempo di Rindler sono definiti due vettori di Killing: ∂_t rispetto alla coordinata temporale di $\mathcal{M}^4$, e ∂_T rispetto alla coordinata temporale di Rindler.

A ulteriore conferma di questo — come si è cercato di evidenziare nella sezione 5.5 — in relatività generale vi sono situazioni fisiche in cui la metrica di una regione dello spaziotempo è modificata e così anche i modi a frequenza positiva di un campo (se ivi definiti). In questi casi non è sorprendente come possa avvenire creazione/distruzione di particelle (come si può evincere calcolando i corrispondenti coefficienti di Bogoliubov). Tutto ciò non ha in realtà nulla a che fare con le coordinate, ma appunto con le *simmetrie*: sono queste a determinare i modi a frequenza positiva e perciò le particelle.

Sulla base di quanto detto, ritengo che in ogni caso gli studi teorici sull'effetto Unruh siano, oltre che di importanza e interesse a livello matematico, profondamente legati agli assiomi della teoria quantistica dei campi e i dubbi sulla natura dell'effetto mettano solamente in luce alcuni aspetti, possibilmente controversi, della teoria.

Appendice A

Teoria spettrale

Nella sezione 1.3 abbiamo determinato un insieme discreto di autovettori dell'hamiltoniana, tuttavia in generale bisogna chiarire come procedere nel caso in cui lo spettro dell'operatore che si vuole rappresentare sia continuo.

In altri termini si vuole generalizzare quanto possibile con la serie e la trasformata di Fourier, che permettono di scrivere funzioni arbitrarie attraverso autofunzioni dell'operatore di Laplace ∇^2 , a operatori differenziali con coefficienti variabili. Questi ultimi nel nostro caso rappresenteranno campi fisici, come quello gravitazionale, considerati “esterni” al sistema in esame.

In questo capitolo esporremo brevemente i principali risultati: vedendo prima alcune definizioni preliminari e successivamente enunciando una generalizzazione del *teorema spettrale*.

A.1 Operatori ellittici, hermitiani e autoaggiunti

Sebbene in questo ambito ci interessi applicare la teoria a operatori definiti in una varietà, quale è lo spaziotempo in generale, possiamo qui trattare il caso di un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (che in generale può essere considerato come l'insieme di coordinate di una carta sulla varietà).

Consideriamo un generico operatore differenziale, lineare, del second'ordine definito su funzioni scalari:

$$H := g^{jk}(x) D_j D_k + b^j(x) D_j + c(x), \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (\text{A.1})$$

dove denotiamo $D_j := -i\partial_j := -i\partial/\partial x^j$ e assumiamo che

- (i) le componenti di g e b siano $C^\infty(\Omega)$,
- (ii) le $g^{jk}(x)$ siano a valori reali.

Si osservi che $\{g^{jk}(x)\}$ si può interpretare come il tensore metrico su Ω .

Definizione A.1.1. L'operatore H si dice *ellittico* se $\{g^{jk}(x)\}$ è una matrice definita positiva (o negativa) per ogni $x \in \Omega$.

Nel nostro contesto, come spazio di funzioni su cui è definito H , sarà opportuno considerare $L^2_\rho(\Omega)$ – quello delle funzioni a quadrato sommabile in Ω . In particolare detta μ_ρ la misura su Ω indotta da una densità ρ , ovvero

$$d\mu_\rho := \rho(x)dx, \quad \rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\text{A.2})$$

definiamo con $\mathcal{L}^2_\rho(\Omega)$ lo spazio di Hilbert formato dalle funzioni aventi semi-norma

$$\|\psi\| = \left(\int_\Omega |\psi(x)|^2 d\mu_\rho(x) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

finita. Lo spazio $L^2_\rho(\Omega)$ è quindi l'insieme formato dalle classi di funzioni di $\mathcal{L}^2_\rho(\Omega)$ che differiscono solo su un insieme di misura nulla.

Definizione A.1.2. L'operatore H ristretto alle funzioni lisce a supporto compatto in Ω , i.e. $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, si dice *hermitiano* se

$$\langle \psi, H\phi \rangle = \langle H\psi, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \psi, \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{A.4})$$

In questo caso abbiamo dato la definizione per un preciso sottospazio di funzioni, ma è possibile darla in generale per un generico sottospazio corrispondente di solito a una particolare scelta di *condizione al contorno* in base al tipo di problema fisico.

Si dimostra inoltre che gli operatori hermitiani che possono essere sviluppati in autofunzioni possiedono un'ulteriore proprietà, è quindi opportuno dare un'altra caratterizzazione:

Definizione A.1.3. Un operatore hermitiano H è detto *autoaggiunto* se

$$\text{range}(H - i) = \text{range}(H + i) = L^2_\rho. \quad (\text{A.5})$$

Dunque sembra possibile rendere autoggiunto un operatore hermitiano allargando il suo dominio di funzioni. Sebbene questo non sia sempre vero, ci sono dei casi notevoli:

Teorema A.1.4. Se H è hermitiano e semilimitato, ovvero esiste a reale per cui

$$\langle \psi, H\psi \rangle \geq a\langle \psi, \psi \rangle, \quad \text{per ogni } \psi \in \text{dom}(H), \quad (\text{A.6})$$

allora esiste un'estensione del suo dominio in cui è autoaggiunto.

Teorema A.1.5. Un operatore hermitiano con coefficienti reali ammette un'estensione del dominio in cui è autoaggiunto.

A.2 Teorema Spettrale

Innanzitutto specifichiamo cosa si intende per *spettro* di un operatore, dando una definizione che generalizza quella nota dai corsi di algebra lineare.

Definizione A.2.1. Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato, diciamo che z appartiene allo spettro di H (in simboli $z \in \sigma(H)$) se la seguente condizione è falsa:

- Esiste l'operatore $(H - z)^{-1}$, definito sullo stesso spazio di H , ed è limitato.

Per quanto riguarda gli operatori per noi più interessanti, quelli autoaggiunti (vedi cap.1), possono presentarsi due casi:

- 1) z è un autovalore (reale) di H e perciò $(H - z)^{-1}$ non è definito, in quanto esiste ψ non nulla tale che $H\psi = z\psi$;
- 2) l'operatore $(H - z)$ è iniettivo ma non suriettivo e $(H - z)^{-1}$ è illimitato.

Nel primo caso gli autovalori costituiscono lo *spettro puntuale* σ_P , mentre quelli per cui vale 2) appartengono allo *spettro continuo* σ_C .

Esempio A.2.2. L'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno fornisce un esempio calzante: le energie positive corrispondono agli stati di scattering dell'elettrone dal protone e formano σ_C , mentre le energie negative sono quelle corrispondenti agli orbitali quantizzati e sono discrete [9].

Possiamo quindi enunciare il teorema spettrale per operatori autoaggiunti, che ci permetterà di sviluppare e quantizzare campi scalari.

Teorema A.2.3 (Teorema Spettrale). *Sia $H : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (dove $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e $\mathcal{D}$ un suo sottospazio denso) un operatore lineare e autoaggiunto. Allora $\mathcal{H}$ è isomorfo allo spazio di funzioni¹*

$$\int^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda} =: L^2(\sigma(H); \mathcal{H}_{\lambda}), \quad (\text{A.7})$$

dove per ogni $\lambda \in \sigma(H)$, $\mathcal{H}_{\lambda}$ è uno spazio di Hilbert con dimensione $d(\lambda)$.

Se $\phi \in L^2(\sigma(H); \mathcal{H}_{\lambda})$, allora per ogni $\lambda \in \sigma(H)$, il valore $\phi(\lambda)$ è un vettore di $\mathcal{H}_{\lambda}$ e la norma nello spazio $L^2(\sigma(H); \mathcal{H}_{\lambda})$ è

$$\|\phi\|^2 = \int_{\sigma(H)} \|\phi(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\mu(\lambda), \quad (\text{A.8})$$

dove $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}$ è una norma su $\mathcal{H}_{\lambda}$ e μ una misura su $\sigma(H)$.

Rappresentato in $L^2(\sigma(H); \mathcal{H}_{\lambda})$, H corrisponde alla moltiplicazione per λ ; dunque se $U : \int^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda} \rightarrow \mathcal{H}$ è una biezione che preserva la norma, si ha

$$H = UDU^{-1}, \quad \text{dove} \quad [D\phi](\lambda) := \lambda\phi(\lambda) \quad \text{per ogni } \lambda \in \sigma(H). \quad (\text{A.9})$$

Il teorema non fornisce alcuna prescrizione per costruire le trasformazioni U e U^{-1} nel caso generale, per operatori differenziali ellittici vale tuttavia questo risultato:

Corollario A.2.4. *Nel contesto descritto nell'enunciato precedente, se $\mathcal{H} = L^2_{\rho}(\Omega)$ e H è un operatore ellittico con coefficienti differenziabili, allora la mappa*

$$U \phi \mapsto \langle e, \phi(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}_{\lambda}}, \quad \text{per } \lambda \in \sigma(H) \text{ ed } e \in \mathcal{H}_{\lambda}, \quad (\text{A.10})$$

¹Si veda [38] per la definizione di integrale diretto.

è data (quasi ovunque) dalla trasformata integrale

$$\langle e, \phi(\lambda) \rangle = \int_{\Omega} e(x)^* [U\phi](x) \rho(x) d^n x, \quad (\text{A.11})$$

dove $e(x)$ è una soluzione classica (i.e. non necessariamente quadrato-sommabile) dell'equazione differenziale $He = \lambda e$.

Nel caso degli operatori ellittici si procede dunque cercando una base ortonormale $\{e_{\lambda,j} : 1 \leq j \leq \dim \mathcal{H}_{\lambda} \leq \infty\}$ di ciascun $\mathcal{H}_{\lambda}$, dopodiché il corollario precedente permette di scrivere la trasformazione inversa

$$[U\phi](x) = \int_{\sigma(H)} \sum_j e_{\lambda,j}(x) \phi_j(\lambda) d\mu(\lambda), \quad (\text{A.12})$$

dove abbiamo posto $\phi_j(\lambda) := \langle e_{\lambda,j}, \phi(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}_{\lambda}}$. Nel caso non si disponga di una base ortonormale la (A.12) assume la forma più complicata:

$$[U\phi](x) = \int_{\sigma(H)} \sum_{j,k} e_{\lambda,j}(x) \phi_k(\lambda) d\mu^{jk}(\lambda), \quad (\text{A.13})$$

dove $\mu^{jk}(\lambda)$ è una misura a valori matriciali. Si ricava anche l'equazione di Parseval per la trasformazione unitaria U :

$$\|U\phi\|^2 := \int_{\Omega} |U\phi|^2 \rho dx \quad (\text{A.14})$$

$$\stackrel{*}{=} \|\phi\|^2 = \int_{\sigma(H)} \sum_{j,k} \phi_j(\lambda)^* \phi_k(\lambda) d\mu^{jk}(\lambda), \quad (\text{A.15})$$

dove $\star$ è vera poiché U preserva la norma.

Invece di dare ulteriori dettagli e dimostrazioni, per i nostri scopi è forse più utile fare qualche osservazione su quanto presentato:

- Vediamo innanzitutto che come detto il teorema A.2.3 generalizza quello della *diagonalizzazione simultanea* per il caso finito-dimensionale. Infatti se $\dim \mathcal{H} < \infty$ allora U sarebbe rappresentata da una matrice avente come colonne gli autovettori della matrice associata ad H (in tale base).

Ciò è chiaro anche guardando la (A.12) dove la coppia ordinata (λ, j) e la variabile x generalizzano rispettivamente l'indice di colonna dell'autovettore e quello della riga delle sue componenti.

- La convergenza degli integrali dipende dalla natura delle funzioni $[U\phi](x)$ e $\phi_j(\lambda)$, risultati riguardanti ciò si possono trovare ad esempio in [39], [40].
- Se l'operatore $\hat{H}$ rappresenta un osservabile quantistico H e ϕ è uno stato normalizzato del sistema, allora

$$\int_{\Sigma} \|\phi(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\mu(\lambda) \quad (\text{A.16})$$

è la probabilità di misurare H nello stato ϕ e ottenere un valore in $\Sigma \subset \sigma(\hat{H})$.

Esempio A.2.5. Vediamo infine come applicare quanto detto al problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde, ossia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \nabla^2 u(t, x) =: -Ku(t, x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.17})$$

con le condizioni al contorno

$$f(x) = \phi(0, x), \quad g(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x), \quad (\text{A.18})$$

dove f e g sono funzioni sufficientemente regolari (basterebbe rispettivamente C^3 e C^2).

Nel caso unidimensionale con $\Omega = (0, 1)$ le condizioni di periodicità $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ garantiscono uno spettro degli autovalori di K discreto:

$$\{E_k : k \geq 1\} := \{(k\pi)^2 : k \geq 1\}, \quad (\text{A.19})$$

mentre le autofunzioni sono date da $u_k := \sin(k\pi x)$. La soluzione generale, come si vede nei corsi di equazioni differenziali, si può scrivere con la serie di Fourier

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t) \right) \sin(k\pi x), \quad (\text{A.20})$$

dove

$$a_k = 2 \int_0^1 f(y) \sin(k\pi y) dy, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 g(y) \sin(k\pi y) dy. \quad (\text{A.21})$$

In altri termini l'insieme $\{\sqrt{2} \sin(k\pi x)\}$ è una base ortonormale per $L^2((0, 1))$ e K agisce sui domini delle funzioni a quadrato sommabile del tipo $f = \sum_k a_k u_k$ e $g = \sum_k b_k u_k$ nel primo caso con una moltiplicazione di fattore $\cos(k\pi t)$ e nel secondo di $\sin(k\pi t)$.

Introducendo per ogni funzione $G(\lambda)$ reale di variabile reale la definizione

$$[G(K)h](x) := \sum_{k=1}^{\infty} G(E_k) h_k \sin(k\pi x), \quad \text{dove} \quad h_k := \frac{\langle u_k, h \rangle}{\|u_k\|^2}, \quad (\text{A.22})$$

la (A.20) si può sintetizzare nella

$$u(t, \cdot) = [\cos(t\sqrt{K})]f + \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}g. \quad (\text{A.23})$$

La teoria spettrale ci permette di scrivere la soluzione generale nel modo compatto (A.23) anche nel caso di Ω generico aperto in $\mathbb{R}^n$ e in cui non si considerano necessariamente condizioni di periodicità, i.e su k si integra e non si somma.

Bibliografia

- [1] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. University of Chicago Press, 1994.
- [2] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time,” *Physical Review D*, vol. **7**, pp. 2850–2862, 1973.
- [3] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Physical Review D*, vol. **14**, pp. 870–892, 1976.
- [4] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. **43**, pp. 199–220, 1975.
- [5] W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*. Springer, 2012.
- [6] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [7] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, vol. **60**. Springer, 2013.
- [8] S. Sonego, *Classical Mechanics*. 2021.
- [9] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [10] C. Clason, *The Riesz Representation Theorem*. Springer, 2020.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Dui, and F. Laloe, *Quantum Mechanics*. Wiley-Interscience, 2006.
- [12] R. Geroch, *Quantum Field Theory: 1971 Lecture Notes*. Minkowski Institute Press, 2013.
- [13] P. R. Halmos and V. S. Sunder, *Bounded Integral Operators on L^2 spaces*, vol. **96**. Springer, 2012.
- [14] J. Rosenberg, “A selective history of the Stone–von Neumann theorem,” *Contemporary Mathematics*, vol. **365**, pp. 331–354, 2004.
- [15] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications (eighth edition)*, pp. 262–265. McGraw-Hill, 2009.

- [16] A. M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, pp. 41–47. Cambridge University Press, 2 ed., 2003.
- [17] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1989.
- [18] M. E. Peskin, *An introduction to Quantum Field Theory*. CRC press, 2018.
- [19] M. Socolovsky, “Rindler space and Unruh effect,” *arXiv preprint arXiv:1304.2833*, 2013.
- [20] F. M. Fernández, *Introduction to Perturbation Theory in Quantum Mechanics*. CRC press, 2000.
- [21] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [22] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, “The Unruh effect and its applications,” *Reviews of Modern Physics*, vol. **80**, pp. 787–838, 2008.
- [23] M. Planck, “Ueber irreversible strahlungsvorgänge,” *Annalen der Physik*, vol. **306**, pp. 69–122, 1900.
- [24] J. S. Dowker and R. Critchley, “Stress-tensor conformal anomaly for scalar, spinor, and vector fields,” *Physical Review D*, vol. **16**, pp. 3390–3394, 1977.
- [25] J. S. Dowker and R. Critchley, “Vacuum stress tensor in an Einstein universe: Finite-temperature effects,” *Physical Review D*, vol. **15**, pp. 1484–1493, 1977.
- [26] P. C. W. Davies, “Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. **8**, pp. 609–616, 1975.
- [27] D. Sciama, P. Candelas, and D. Deutsch, “Quantum field theory, horizons and thermodynamics,” *Advances in Physics*, vol. **30**, pp. 327–366, 1981.
- [28] P. Milonni, “Semiclassical and quantum-electrodynamical approaches in nonrelativistic radiation theory,” *Physics Reports*, vol. **25**, pp. 1–81, 1976.
- [29] V. Fain, Y. I. Khanin, J. Sanders, and N. Bloembergen, *Quantum Electronics: Maser Amplifiers and Oscillators*. Pergamon Press, 1969.
- [30] W. G. Unruh and R. M. Wald, “What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle,” *Physical Review D*, vol. **29**, pp. 1047–1056, 1984.
- [31] E. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations (pt. 1)*. Clarendon Press, 1962.
- [32] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2014.
- [33] M. D. Kruskal, “Maximal extension of Schwarzschild metric,” *Physical Review*, vol. **119**, pp. 1743–1745, 1960.

- [34] R. M. Wald, “The thermodynamics of black holes,” *Living Reviews in Relativity*, vol. **4**, pp. 1–44, 2001.
- [35] S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature*, vol. **248**, pp. 30–31, 1974.
- [36] V. Belinskii, B. Karnakov, V. Mur, and N. Narozhnyi, “Does the Unruh effect exist?,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. **65**, pp. 902–908, 1997.
- [37] I. Peña and D. Sudarsky, “On the possibility of measuring the Unruh effect,” *Foundations of Physics*, vol. **44**, pp. 689–708, 2014.
- [38] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*. Springer, 2013.
- [39] N. Dunford, “Spectral theory: I convergence to projections,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. **54**, pp. 185–217, 1943.
- [40] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer, 1987.