
SCUOLA SUPERIORE DI UDINE

UNIVERSITÀ DI UDINE

Tesina di ottobre

Corso di Laurea in Matematica



Moti Rigidi e Uniformemente Accelerati nello Spaziotempo di Minkowski

Relatore:
Prof. Sonogo Sebastiano

Presentata da:
Nicola Dal Cin

Anno Accademico
2019 - 2020

Indice

1	Origine della Relatività Ristretta	4
1.1	Relatività e sistemi di riferimento	4
1.1.1	Le trasformazioni Galileiane	4
1.2	Un primo tentativo: la teoria dell'etere	6
1.3	Le basi della Relatività Ristretta	7
1.3.1	Accenno alla Relatività Generale: il Principio di Equivalenza	7
2	Formulazione matematica della teoria	9
2.1	Trasformazioni di Lorentz	9
2.2	Proprietà delle trasformazioni di Lorentz	11
2.2.1	I diagrammi di Minkowski	12
2.3	Cinematica Relativistica	14
2.3.1	Trasformazioni della velocità	14
2.3.2	Moto iperbolico	15
3	Lo spaziotempo di Minkowski	17
3.1	Diagrammi di Minkowski tridimensionali	17
3.2	Coni di luce e intervalli	18
3.3	Una precisazione sulla contrazione di Lorentz e la definizione di lunghezza .	20
3.3.1	Il paradosso di Bell	20
3.4	Movimento rigido e barra uniformemente accelerata	22
3.5	Le coordinate di Rindler	23
4	Rigidità Relativistica	27
4.1	Rigidità secondo Born	27
4.2	Risultati generali	28
4.3	Conclusioni	31

Abstract

In questo elaborato richiameremo la formulazione assiomatica della Relatività Ristretta e ricaveremo alcuni dei risultati principali, come ad esempio le trasformazioni di Lorentz e le loro proprietà. Dopo aver trattato brevemente le trasformazioni cinematiche relativistiche e il caso del moto unidirezionale con accelerazione propria uniforme, definiremo lo *spaziotempo di Minkowski* e gli omonimi diagrammi. In seguito si analizzerà il concetto di *movimento rigido* in ambito relativistico, nella definizione di Born, portando l'esempio del *Paradosso di Bell*.

Osservando che i punti di un'asta rigida 'sono' delle linee universo iperboliche, si introdurranno le *Coordinate di Rindler* nello spaziotempo di Minkowski e se ne descriveranno alcune proprietà. Infine daremo la definizione di rigidità secondo Born in uno spaziotempo generale e vedremo alcuni importanti risultati come il paradosso di Eherenfest e il teorema di Herglotz-Noether. Questi ultimi evidenziano come la definizione di moto rigido data sia restrittiva e perciò oggetto di studi recenti, che ne propongono versioni più 'deboli'.

Capitolo 1

Origine della Relatività Ristretta

In questo capitolo vedremo una breve panoramica del contesto storico della fisica teorica, in cui si sviluppò la celebre e rivoluzionaria teoria di Einstein. Gli argomenti sono presentati brevemente, mirando più a fornire una ‘geodetica’ introduttiva che ad un approccio didattico e sistematico.

1.1 Relatività e sistemi di riferimento

In una riformulazione assiomatica, posteriore al lavoro di Einstein, la *relatività* di una teoria fisica viene identificata dal gruppo delle trasformazioni rispetto a cui le leggi teorizzate sono invarianti. Questa struttura algebrica descrive quindi le simmetrie fisiche dell’universo in esame.

Spesso le leggi fisiche, riguardanti un sistema fisico, sono formulate relativamente ad una determinata porzione di universo detta *sistema di riferimento*. Questa restrizione permette di introdurre grandezze come la velocità, il campo magnetico, etc. ed è opportuno richiedere che tali sistemi si comportino come estensioni di corpi rigidi (*sistemi di riferimento rigidi*).

Inoltre il *Principio d’Inerzia* newtoniano suggerì la definizione di *sistema di riferimento inerziale*: un sistema di riferimento rigido in cui le particelle libere hanno accelerazione nulla rispetto al sistema stesso.

Come sistema di riferimento inerziale fondamentale, rispetto a cui definire gli altri in base al moto relativo, Newton postulò lo *spazio assoluto*, in cui egli suppose trovarsi il centro di massa del sistema solare a riposo. Tuttavia in un secondo momento ci si accorse come la teoria newtoniana potesse fare a meno di un’assunzione così controversa, semplicemente considerando l’esistenza di infinite classi di equivalenza di sistemi fra loro inerziali. Spesso si prende come rappresentante della classe di cui fa parte la Terra il “cielo delle stelle fisse”: corpi celesti posti ad una distanza talmente elevata dal nostro pianeta che le loro distanze relative appaiono invarianti.

Infine si suppose ogni sistema di riferimento dotato di coordinate ortogonali cartesiane x, y, z . Questa forte assunzione, sebbene presupponga che nel sistema di riferimento viga una metrica euclidea, era giustificata dall’intuizione fisica e mai stata, prima del 1915, messa in discussione.

1.1.1 Le trasformazioni Galileiane

Vediamo quindi di definire il gruppo di trasformazioni che rappresenta le simmetrie della cinematica newtoniana.

Si considerino due sistemi di riferimento rigidi S e S' in moto relativo con velocità uniforme v . Supponiamo inoltre che siano utilizzate le stesse unità di misura per la lunghezza e il tempo in entrambi i sistemi, ossia che ciascuno di essi sia dotato delle medesime istruzioni per definirle.

Definizione 1.1.1. Diremo che i sistemi di coordinate $S : \{x, y, z, t\}$ e $S' : \{x', y', z', t'\}$ sono in *configurazione standard* se l'origine di S' si muove con velocità costante e pari a v lungo l'asse x di S , l'asse x' coincide con quello x , mentre y e y' , z e z' rimangono rispettivamente paralleli fra loro. Inoltre supponiamo che entrambi gli orologi siano azzerati nel momento in cui le origini dei due sistemi coincidono.

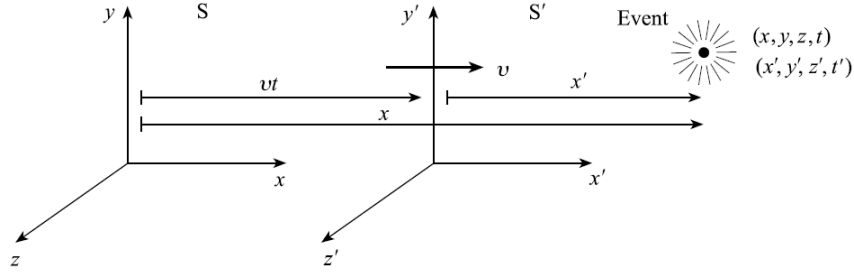


Figura 1.1: I sistemi S e S' in configurazione standard

Supponiamo che un *evento* (come l'accensione di una lampadina o uno sparo) abbia coordinate (x, y, z, t) rispetto a S e (x', y', z', t') rispetto a S' . Allora la relazione *classica* tra i due insiemi di coordinate è espressa dalle *trasformazioni galileiane standard* (GT):

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.1)$$

Si noti che vt è la distanza dall'origine di S' da quella di S al tempo t , mentre l'ultima uguaglianza di (1.1) postula l'assolutezza del tempo nella teoria.

Osservazione 1.1.2. L'invarianza della variabile temporale è necessaria nella formulazione della *terza legge della dinamica* in quanto il corpo su cui si agisce, anche a distanza, reagisce in modo contrario e istantaneo, indipendentemente dall'eventuale variazione o "tempo di trasmissione" della forza esercitata.

Per ottenere le trasformazioni classiche della velocità di un corpo in movimento è sufficiente derivare, a sinistra rispetto a t' e a destra rispetto a t , la (1.1):

$$u'_1 = u_1 - v, \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3, \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ e $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$.

Ponendo $a_i = du_i/dt$ e $a'_i = du'_i/dt'$ per $i = 1, 2, 3$ e derivando nuovamente si ricava l'invarianza dell'accelerazione per trasformazioni galileiane:

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_2, \quad a'_3 = a_3. \quad (1.3)$$

In forma vettoriale abbiamo equivalentemente

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (1.4)$$

dove $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$ sono i vettori posizione, velocità e accelerazione (e i loro analoghi primi) in S (in S'); $\mathbf{v}$ è il vettore rappresentante la velocità di S' relativamente a S .

Ora per avere l'invarianza delle tre leggi della dinamica newtoniana, grazie alla (1.3), è sufficiente postulare che la massa e qualunque forza siano invarianti rispetto a quelle trasformazioni.

Osserviamo infine come per due sistemi di riferimento che non siano in configurazione standard, il gruppo delle *trasformazioni galileiane generale* sia generato da quello *standard* appena visto, da rotazioni e da traslazioni, sia spaziali che temporali. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.1.3. *Il gruppo delle simmetrie galileiane è generato da $SO(3)$, dal gruppo delle traslazioni nello spaziotempo e dei moti uniformi. Inoltre esso è un gruppo di Lie di dimensione 10.*

Dimostrazione. Intuitivamente il procedimento ‘fisico’ è quello di utilizzare una traslazione spaziale per far coincidere le origini di S e S' , una temporale per sincronizzare gli orologi, una rotazione per ottenere il parallelismo tra gli assi e comporre il tutto per un moto lungo un vettore che faccia mantenere la traiettoria lungo l'asse x' .

Preso $(\mathbf{r}, t)$ nello spaziotempo il gruppo dei moti uniformi è formato da elementi del tipo

$$(\mathbf{r}, t) \mapsto (\mathbf{r} + t\mathbf{v}, t), \quad (1.5)$$

con $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e quindi ha dimensione 3. Nel caso di traslazioni abbiamo 3 dimensioni spaziali e una temporale quindi 4 totali:

$$(\mathbf{r}, t) \mapsto (\mathbf{r} + \mathbf{a}, t + s), \quad \text{dove } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ e } s \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Infine una generica rotazione è $(\mathbf{r}, t) \mapsto (R\mathbf{r}, t)$, con $R \in SO(3)$. Siccome $\dim[O(n)] = n(n-1)/2$ ¹ allora $\dim[SO(3)] = 3$ e abbiamo un totale di 10 parametri. $\square$

1.2 Un primo tentativo: la teoria dell'etere

L'idea di Newton di uno spazio assoluto fu da sempre criticata, sia dai suoi contemporanei che da successori come Mach e Einstein rispettivamente nel XIX e XX secolo. Le principali argomentazioni che venivano contrapposte erano:

- (i) Lo spazio assoluto non possiede alcune proprietà intrinseche che lo distinguano dagli altri sistemi di riferimento iniziali.
- (ii) Un'entità che agisce ma su cui non si può agire è contraddittoria (rispetto alla comprensione scientifica e agli stessi principi newtoniani).

Un tentativo di perfezionare la teoria classica e di vanificare la prima obiezione fu fatto verso la fine del XIX secolo. In questo periodo, infatti, la teoria elettromagnetica di Maxwell aveva fatto emergere una costante c , con la dimensione di una velocità, che coincideva con quella della luce nel vuoto. Ciò aveva portato Maxwell a congetturare la natura elettromagnetica della luce e a riprendere l'antico concetto di etere come mezzo di propagazione di queste onde. L'intenzione era quindi di risolvere (i) definendo lo spazio assoluto come il sistema in cui l'etere è ‘fermo’.

Furono così progettati diversi esperimenti per provare l'esistenza dell'etere; il più celebre, quello di Michelson e Morley, mirava a misurare la velocità della Terra durante la sua orbita attraverso l'etere.

¹vedi riferimento a testo

Tuttavia le rilevazioni non si conciliavano con le ipotesi fatte: la luce appariva muoversi lungo ogni direzione con la medesima velocità. Questo ‘fallimento’ sperimentale fu però di stimolo per l’intuizione matematica di Fitzgerald, egli osservò che tale incongruenza si risolveva supponendo, nei corpi in moto di velocità v rispetto all’etere, una *contrazione* di fattore $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ lungo la direzione del moto.

Come vedremo questa osservazione, sviluppata successivamente anche da Lorentz, pone le basi per le trasformazioni che reggono il collegamento tra i vari sistemi di riferimento considerati da Einstein nella relatività ristretta. È proprio quest’ultimo ad abbandonare i preconcetti empirici newtoniani e a dare un’interpretazione fisica delle trasformazioni di Lorentz, abolendo il dogma del tempo assoluto. Sebbene Lorentz fosse un fisico geniale ed ebbe l’intuizione matematica di introdurre le omonime trasformazioni, non riuscì a sganciarsi dalla forviante concezione di etere e di sistema di riferimento privilegiato.

1.3 Le basi della Relatività Ristretta

La soluzione di Einstein alle problematiche dell’etere evidenziate dall’esperimento di Michelson e Morley fu radicale e sconvolgente. Nel suo celebre articolo del 1905 enunciò i due fondamentali *metaprinicipi* della sua teoria:

- *Principio di Relatività* (RP): tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti per la formulazione delle leggi fisiche (quindi anche relativamente ai risultati degli esperimenti in essi effettuati).
- *Invarianza della velocità della luce*: la luce viaggia in modo rettilineo a velocità c in ogni direzione e in ogni sistema di riferimento.

Il termine *metaprinzipio* è utilizzato poiché, come vedremo, queste assunzioni pongono fondamentali e all’epoca rivoluzionarie restrizioni a ogni teoria fisica.

Osserviamo come il Principio di Relatività ‘spieghi’ a priori i risultati degli esperimenti sull’etere, viceversa essi corroborano questa assunzione.

La teoria sviluppata a partire dai due principi sopracitati è chiamata *Relatività Ristretta* (o *Speciale*) e l’idea direttrice seguita da Einstein fu quella di riscrivere le leggi della fisica, quando necessario, in modo da renderle valide egualmente in ogni sistema di riferimento inerziale. È in qualche modo sorprendente come nella maggior parte dei casi classici la differenza empirica tra le teorie sia minima, almeno per le misurazioni effettuabili all’epoca, e ciò testimonia la “potenza” della fisica teorica.

1.3.1 Accenno alla Relatività Generale: il Principio di Equivalenza

Nell’intento di perfezionare la Relatività Ristretta, incompatibile con la teoria della gravitazione newtoniana, Einstein aggiunse un ultimo metaprinzipio al suo quadro assiomatico: il *Principio di Equivalenza*. Quest’ultimo, nella variante newtoniana, asseriva l’uguaglianza tra la massa gravitazionale ed inerziale ed era stato a più riprese confermato sperimentalmente. Anche qui Einstein, come nel caso del principio di relatività, estese il principio preesistente a tutti gli esperimenti fisici, non solo a quelli meccanici.

Per capire meglio la formulazione relativistica, esaminiamo quello che Einstein definisce *sistema di riferimento inerziale locale* (LIF): una cabina in caduta libera e non rotante, sufficientemente piccola affinché le linee del campo gravitazionale siano parallele al suo interno e di utilizzo limitato nel tempo (per garantire in tutto il periodo questa condizione).

- *Principio di Equivalenza* (EP): tutti i sistemi inerziali locali sono equivalenti per la formulazione delle leggi fisiche e relativamente agli esperimenti in essi effettuati.

Einstein suppone direttamente questo risultato, estensione di un teorema valido solo per gli esperimenti meccanici e dimostrabile in fisica classica a partire da $m_I = m_g$. Per lui non sono le masse presenti nelle equazioni ad essere uguali, ma le forze stesse ad essere della stessa natura: osservatori diversi interpretano la natura di una forza inerziale (apparente) o gravitazionale in base al loro punto di vista.

Osservazione 1.3.1. I sistemi di riferimento locali relativistici sono di dimensione esigua rispetto a quelli considerati da Newton (che potevano essere dell'ordine di grandezza di galassie); questo permette di abbandonare il pregiudizio di una metrica euclidea e di muoversi in un contesto più generale in cui geometria locale e globale sono profondamente differenti.

Si noti poi che i LIF ad un evento formano una famiglia infinita, in cui ciascun elemento è in moto relativo uniforme; tuttavia due sistemi di riferimento inerziali rispetto a due punti distinti in generale accelerano fra loro.

Capitolo 2

Formulazione matematica della teoria

Uno dei risultati più importanti, raggiunto grazie al lavoro di Poincaré e Minkowski, che contribuì al successo della teoria relativistica, fu quello di trovare un'opportuna struttura di spaziotempo tale da incorporare i suoi principi in modo naturale ed elegante.

Seguendo un approccio deduttivo ricaveremo prima il gruppo che determina le simmetrie (secondo l'accezione della sezione 1.1.1) della relatività speciale e successivamente esporremo alcune loro fondamentali caratteristiche.

2.1 Trasformazioni di Lorentz

Prima di ricavare le trasformazioni di coordinate da un sistema di riferimento all'altro, è opportuno chiarire brevemente come queste siano assegnate nel singolo sistema di riferimento.

Concettualmente è preferibile dotare di coordinate preventivamente il sistema di riferimento, diciamo S , e di leggere le coordinate di tutti gli eventi *localmente*. Perciò immaginiamo un insieme di orologi posizionati in ogni punto dello spazio. Per sincronizzarli è sufficiente emettere un segnale luminoso dall'origine di S a un dato tempo t_0 e settare ciascun orologio al tempo $t_0 + r/c$ quando il raggio lo raggiunge, dove r è la sua distanza dall'origine.

Definizione 2.1.1. Diciamo *coordinate standard* per un certo evento accaduto nel sistema S la quadrupla (x, y, z, t) , formata dalle coordinate spaziali $x, y, z \in \mathbb{R}$ dell'orologio nel luogo dell'evento e dal tempo $t = t_0 + r/c$ letto sull'orologio (sincronizzato preventivamente come sopra).

Lemma 2.1.2. La trasformazione $(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$ delle coordinate standard di un dato evento da un sistema inerziale S in un altro S' è lineare.

Dimostrazione. Consideriamo un orologio standard C che si muova liberamente attraverso S , con traiettoria data dalle $x_i = x_i(t)$, dove $x_i (i = 1, 2, 3)$ rappresenta le coordinate spaziali (x, y, z) . Si osservi che il riferimento cartesiano e la metrica euclidea presupposti implicano l'omogeneità spaziale e temporale dell'universo. Dalla prima legge della dinamica segue che $dx_i/dt = \text{cost}$ e, detto τ il tempo indicato da C , dall'omogeneità temporale segue $dt/d\tau = \text{cost}$. Da ciò abbiamo

$$dx_\mu/d\tau = \text{cost}, \quad d^2x_\mu/d\tau^2 = 0, \quad (2.1)$$

dove x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) indica (x, y, z, t) . Sempre per l'omogeneità spazio-temporale, anche in S' abbiamo $d^2x'_\mu/d\tau^2 = 0$. Allora

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad \frac{d^2x'_\mu}{d\tau^2} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} + \sum_{\nu,\sigma=1}^4 \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} \frac{dx_\sigma}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau}. \quad (2.2)$$

Dalla seconda della (2.2) segue allora che

$$\sum_{\nu,\sigma=1}^4 \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} \frac{dx_\sigma}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.3)$$

e ciò è possibile solamente se $\partial^2 x'_\mu / \partial x_\nu \partial x_\sigma = 0$, per ogni $\mu, \nu, \sigma = 1, \dots, 4$. Dunque la trasformazione è lineare. $\square$

Ciò comporta che tutte le particelle che compongono il reticolo del sistema di riferimento S' si muovano con velocità costante e uguale fra loro attraverso S . Un'altra conseguenza della linearità e della isotropia è che due sistemi di riferimento inerziali S e S' possono sempre essere scelti in configurazione standard; possiamo quindi scrivere le trasformazioni in questo caso particolare senza perdita di generalità.

Osservazione 2.1.3. La trasformazione tra qualsiasi coppia di sistemi inerziali in configurazione standard, con velocità relativa v , dev'essere la stessa. Riferendoci alla figura 1.1 notiamo che scambiando le x_μ con le x'_μ otteniamo la stessa situazione a ruoli invertiti e se la componiamo con una riflessione rispetto al piano yz si ottiene la situazione di partenza ribaltata, che per isotropia deve produrre gli stessi risultati. In altri termini la trasformazione cercata è invariante per l'azione:

$$x \leftrightarrow -x', \quad y \leftrightarrow y', \quad z \leftrightarrow z', \quad t \leftrightarrow t'. \quad (2.4)$$

Per il lemma 2.1.2 esistono coefficienti reali costanti e dipendenti da v tali che

$$y' = Ax + By + Cz + Dt + E. \quad (2.5)$$

Dalla scelta delle coordinate $y = 0$ implica $y' = 0$, quindi $A = C = D = E = 0$ e dunque $y' = By$. Applicando la (2.4) otteniamo $y = By'$ e quindi $B = \pm 1$, tuttavia siccome per $v \rightarrow 0$ si deve ottenere la trasformazione identica con continuità, otteniamo $B = 1$.

Analoghe considerazioni valgono per il caso di z e quindi abbiamo che la trasformazione fissa le coordinate y e z .

Supponiamo ora che

$$x' = \gamma x + Fy + Gz + Ht + J, \quad (2.6)$$

per la scelta delle coordinate da $x = vt$ segue $x' = 0$ e perciò $H = \gamma v$, $H = F = G = J = 0$ e

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (2.7)$$

Applicando nuovamente (2.4) si ha

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (2.8)$$

Osserviamo come a questo punto l'utilizzo dell'assioma classico $t = t'$ permette di ricavare le equazioni galileiane (1.2). Applicando invece il principio dell'invarianza della velocità della luce, secondo cui $x = ct$ e $x' = ct'$ sono entrambe valide in quanto descrizione del medesimo raggio luminoso in S e S' , otteniamo

$$ct' = \gamma t(c - v) \quad \text{e} \quad ct = \gamma t'(c + v) \quad (2.9)$$

che moltiplicate fra loro e divise per tt' danno

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (2.10)$$

dove si è preso il valore positivo della radice in quanto nella (2.7) x' deve tendere a x in modo continuo per $v \rightarrow 0$.

Definizione 2.1.4. La funzione γ definita in (2.10) è detta *fattore Lorentziano*.

Si osservi come per $v \geq c$ la funzione, e quindi la trasformazione di coordinate, non sia definita: un primo indizio dell'esistenza di un limite per la velocità di una particella.

Infine sostituendo (2.7) nella (2.8) si ottiene $t' = \gamma(t - vx/c^2)$. Verifichiamo che le equazioni di Lorentz rispettino i postulati di Einstein nel caso generale (e non solo dalle istanze particolari che abbiamo usato per derivarle).

Innanzitutto la linearità implica che punti in moto rettilineo uniforme rispetto a S vengono mandati in punti in moto rettilineo uniforme rispetto a S' . Inoltre dalla (2.8) e (2.10) si ricava la fondamentale identità

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2; \quad (2.11)$$

Da quest'ultima segue che $dr^2 = c^2 dt^2$ implica $dr'^2 = c^2 dt'^2$, dove $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Quindi la metrica euclidea e l'invarianza della velocità della luce in ogni direzione sono rispettate dalle LT. Resta solamente da dimostrare che tali trasformazioni formano un gruppo (cosa che faremo successivamente con una scrittura più agevole) per avere il seguente teorema:

Teorema 2.1.5. *Dati due sistemi inerziali S e S' in posizione standard, le equazioni della trasformazione di coordinate sono*

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (2.12)$$

dove v è la velocità relativa tra i due sistemi e γ il fattore Lorentziano. Le (2.12) sono perciò dette Trasformazioni di Lorentz standard.

Infine possiamo introdurre brevemente il gruppo delle isometrie che caratterizza la relatività speciale e, come vedremo, lo spaziotempo di Minkowski: il *gruppo di Poincaré*. Un elemento di tale gruppo trasforma un sistema inerziale S in un secondo sistema di riferimento inerziale S' non in configurazione standard rispetto ad esso. Quest'operazione è ottenuta componendo rotazioni e traslazioni spaziali e temporali con LT, si può provare inoltre il seguente risultato:

Teorema 2.1.6. *Il gruppo di Poincaré è il prodotto semidiretto¹ delle traslazioni e il gruppo delle trasformazioni di Lorentz.*

2.2 Proprietà delle trasformazioni di Lorentz

Elenchiamo e commentiamo brevemente alcune tra le principali caratteristiche delle trasformazioni di Lorentz:

¹Dove per prodotto semidiretto tra due gruppi $(G_1, \cdot)$, $(G_2, \star)$, per un certo $\psi \in \text{Hom}(G_2, \text{Aut}(G_1))$, intendiamo la struttura algebrica $(G_1 \times G_2, *)$ con $(a, b) * (c, d) := (a \cdot \psi_b(c), b \star d)$ e $\psi_b := \psi(b) \in \text{Aut}(G_1)$.

- i) *Relatività del concetto di simultaneità*: la componente delle trasformazioni che sorprende maggiormente è sicuramente quella temporale; eventi contemporanei rispetto a un certo sistema, aventi uguale t , non corrispondono necessariamente ad eventi con uguale t' .
- ii) *Limite newtoniano*: Si osservi come per velocità $v \ll c$ (e x non arbitrariamente grandi) le equazioni di Lorentz siano bene approssimabili con quelle di Galileo, motivo per cui i risultati sperimentali non ne avevano ancora mai fatto sospettare l'inaccuratezza.
- iii) *Esistenza di una velocità limite*: si osservi come dall'ipotesi di una velocità c , invariante per trasformazioni di Lorentz², segua una limitazione per ogni velocità fisica: $v < c$.
- iv) *Invariante quadratico*: Osserviamo che dalle (2.12) è possibile ricavare la fondamentale identità:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.13)$$

Siccome le differenze finite tra coordinate di due eventi distinti e i differenziali di coordinate soddisfano le (2.12), cosa di facile verifica, dalla (2.13) abbiamo anche

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14)$$

e

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (2.15)$$

Osservazione 2.2.1. Poiché le traslazioni spaziali e temporali lasciano i termini Δ - e d -invarianti e le rotazioni fissano le componenti spaziali e temporali di (2.13) e (2.14), si ha che le suddette identità vengono preservate dalle trasformazioni di Poincaré. Si può mostrare, viceversa, che il gruppo di Poincaré è formato dai morfismi più generali soddisfacenti (2.13); è quindi ben motivata la seguente definizione.

Definizione 2.2.2. Il valore della forma quadratica (2.14)

$$\varphi(\Delta\ell) := g(\Delta\ell, \Delta\ell) = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.16)$$

è detto *invariante quadratico* mentre $\Delta s := \sqrt{|\varphi(\Delta\ell)|}$ *intervallo*, dove la forma bilineare g , che induce la *metrica di Minkowski*, è

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta\ell = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (2.17)$$

2.2.1 I diagrammi di Minkowski

In questa sezione ci soffermeremo sulla rappresentazione grafica delle trasformazioni (2.12), per farlo ci concentreremo solo sulle componenti x e t che raffigureremo per comodità, ma senza un particolare significato geometrico, come gli assi ortogonali di un piano cartesiano.

Per prima cosa distinguiamo due possibili interpretazioni del cambio di coordinate $(x, t) \mapsto (x', t')$: una, *dinamica*, che vede il punto (x, t) spostarsi in (x', t') nello stesso

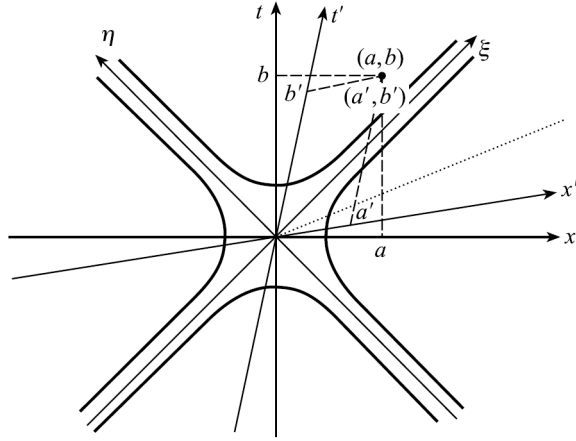


Figura 2.1: Diagramma di Minkowski appena descritto. Si può apprezzare il cambio di coordinate da S a S' graficamente ottenuto con la regola del parallelogramma.

sistema di riferimento, mentre l'altra, *statica*, che interpreta (x', t') semplicemente come il punto (x, t) visto in un secondo sistema di riferimento.

Concentriamoci per ora su quest'ultimo caso, che deve la sua importanza anche alla possibilità di esplicitare la contrazione delle lunghezze e il rallentamento dello scorrere del tempo di un sistema S' osservato da S .

Disegnando un grafico come quello in figura - che presenta solo una componente spaziale del sistema S - è chiaro come sia possibile rappresentare quello che succede lungo questo asse *solo* nei sistemi di riferimento inerziali e in configurazione standard rispetto ad S .

Una curva $x = f(t)$ nel piano rappresentato raffigura il moto di un punto geometrico lungo l'asse x ed è chiamata *linea universo*. La sua inclinazione rispetto all'asse t , dx/dt , misura la velocità del punto in S ed è minore di $c := 1$, utilizzando unità relativistiche.

Gli *istanti* in S sono rappresentati da equazioni del tipo $t = \text{cost}$ mentre la *linea universo* di un punto fisso è verticale: $x = \text{cost}$. Fatte queste considerazioni possiamo utilizzare le (2.12) per rappresentare gli assi del sistema S' , inerziale e in configurazione standard rispetto a S : l'asse x' è dato dalla retta $t = vx$, mentre t' da $x = vt$.

Osservazione 2.2.3. Gli assi di S' sottendono angoli uguali rispetto ai loro corrispettivi in S tuttavia, mentre nel caso classico ciò è ottenuto mediante una rotazione che fissa $\Delta r = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^t$, nel caso delle LT gli angoli sono descritti in sensi opposti. Ciò è dovuto al fatto che l'invariante metrico in questo caso non è il quadrivettore $\Delta \ell$, ma bensì $\varphi(\Delta \ell)$.

Quest'ultimo fatto suggerisce di adottare la metrica di Minkowski nel diagramma in considerazione, osserviamo che questa coincide con quella euclidea (per modulo) lungo le rette $t = \text{cost}$, e in particolare nell'asse x , ma non in generale.

Notiamo infine che il luogo dei punti con intervallo s^2 dall'origine di S è dato dalle *iperboli calibratrici* $t^2 - x^2 = \pm s^2$.

²È del tutto irrilevante da un punto di vista matematico che questa coincida con la velocità della luce nel vuoto.

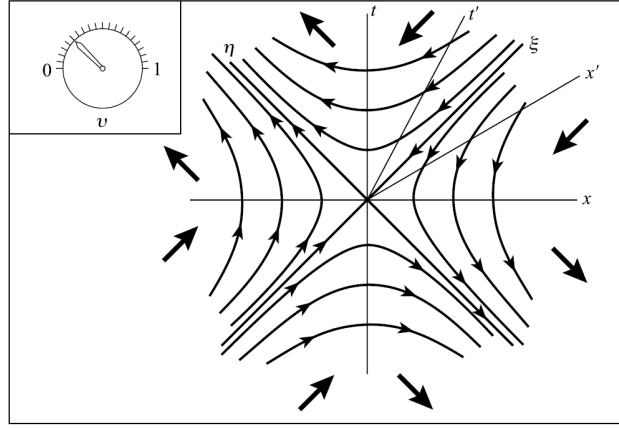


Figura 2.2: Effetto dinamico delle trasformazioni di Lorentz

Vediamo anche brevemente il caso di trasformazioni dinamiche: applicando una LT a un piano cartesiano xt come sopra, il risultato sarà quello di far muovere i punti lungo delle iperboli di equazione $t^2 - x^2 = \text{cost}$, in modo dipendente da v (vedi figura 2.2).

Inoltre le bisettrici dei quadranti vengono mandate in loro stesse e linee rette (particelle con velocità costante w rispetto ad S) vengono mandate in linee rette per linearità della trasformazione (particelle con velocità costante $w' = (w \pm v)/(1 \pm wv)$ rispetto ad S').

Riscriviamo la trasformazione per renderla più chiara: aggiungendo i membri x e t (moltiplicato per c) della (2.12) abbiamo:

$$\begin{aligned} ct' + x' &= e^{-\phi}(ct + x) \\ ct' - x' &= e^{-\phi}(ct - x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove

$$e^{\phi} := \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{1/2}. \quad (2.19)$$

Definizione 2.2.4. ϕ è spesso detto *rapidità* o *parametro iperbolico*.

Si osservi che utilizzando le (2.18) è immediato verificare la proprietà di gruppo delle LT, cosa che altrimenti sarebbe più tediosa da fare formalmente. Il concetto chiave di questo approccio è: applicando una LT attiva con un appropriato ϕ , ricaviamo una rappresentazione degli eventi nelle coordinate di S' in un sistema di assi ortogonali.

2.3 Cinematica Relativistica

Vediamo degli ultimi risultati cinematici che ci permetteranno di modellizzare e trattare il caso di un razzo uniformemente accelerato, situazione ideale a cui faremo riferimento successivamente.

2.3.1 Trasformazioni della velocità

Consideriamo i soliti sistemi S e S' in configurazione standard. Sia $\mathbf{u}$ la velocità istantanea in S di un punto geometrico, con

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt'). \quad (2.21)$$

Per ricavare le componenti di $\mathbf{u}$, differenziamo la (2.12) e sostituiamo in (2.21) ottenendo così

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v/c^2}, \quad u'_2 = \frac{u_2}{\gamma(1 - u_1 v/c^2)}, \quad u'_3 = \frac{u_3}{\gamma(1 - u_1 v/c^2)}. \quad (2.22)$$

Si noti che $\mathbf{u}$ è stata considerata arbitraria, senza condizioni sulla sua uniformità, perciò le (2.22) si applicano istantaneamente nel caso generale di un moto accelerato.

2.3.2 Moto iperbolico

Per studiare moti non uniformi è d'interesse ricavare le trasformazioni dell'accelerazione, per farlo iniziamo differenziando la (2.22) e ottenendo così

$$du'_1 = \frac{D du_1 + (u_1 - v) du_1 v/c^2}{D^2}, \quad du'_i = \frac{\gamma D du_i + u_i \gamma du_1 v/c^2}{\gamma^2 D^2}, \quad (2.23)$$

con $i = 2, 3$, avendo posto $D := 1 - u_1 v/c^2$.

Utilizzando la relazione $dt' = \gamma dt(1 - u_1 v/c^2) = \gamma D dt$ ricaviamo le trasformazioni per le componenti dell'accelerazione $a'_i = du'_i/dt'$:

$$a'_1 = \frac{a_1}{\gamma^3 D^3}, \quad a'_k = \frac{a_k}{\gamma^2 D^2} + \frac{a_1 u_k v}{c^2 \gamma^2 D^3}, \quad k = 2, 3. \quad (2.24)$$

Da queste ultime osserviamo che, a differenza di quanto accade nel caso Galileiano, l'accelerazione non è un invariante per trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo il caso di un moto *rettilineo* lungo l'asse x ($u_1 = u$), sia S' il sistema di riferimento istantaneo in cui la particella è a riposo, i.e. $u_1 = v$, $D = \gamma^{-2}$. Chiamando *accelerazione propria* α della particella quella misurata nel sistema S' , in cui $\alpha = a'_1$, abbiamo

$$\alpha = \gamma^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma(u) u]. \quad (2.25)$$

Osservazione 2.3.1. L'accelerazione propria è quella che produce la forza misurata nel sistema di riferimento rispetto a cui siamo in quiete: la spinta del sedile della vettura (macchina o razzo che sia) in cui siamo seduti, quella dovuta alla reazione vincolare del pavimento su cui camminiamo, la quale è opposta al campo gravitazionale che subiamo (il nostro sistema di riferimento istantaneo è rappresentato come una “cabina di Einstein” che cade con accelerazione g).

Una situazione di particolare rilevanza è il caso del moto unidirezionale con accelerazione propria *costante*. Per ricavare l'equazione del moto, procediamo integrando la (2.25) e prendendo $t = 0$ quando $u = 0$:

$$\alpha t = \gamma(u) u; \quad (2.26)$$

risolvendo per $u = dx/dt$ e integrando, ponendo la costante di integrazione uguale a zero, abbiamo

$$u = \frac{c \alpha t}{\sqrt{c^2 + \alpha^2 t^2}}, \quad x = \int \frac{c \alpha t}{\sqrt{c^2 + \alpha^2 t^2}} dt = \frac{c}{\alpha} \sqrt{c^2 + \alpha^2 t^2}. \quad (2.27)$$

Infine elevando al quadrato otteniamo l'equazione della linea universo

$$x^2 - c^2 t^2 = c^4 / \alpha^2. \quad (2.28)$$

Per ovvie ragioni, questo moto è detto *iperbolico*; si osservi che un analogo procedimento nel caso Newtoniano avrebbe condotto all'equazione di un “moto parabolico”: $x = \alpha t^2/2$.

La (2.28) evidenzia come un corpo, per quanto a lungo possa accelerare, non raggiunga mai la velocità della luce, tuttavia se si inviasse un segnale (un fotone) da una sorgente collocata nell'origine e distante c^2/α dalla particella all'istante $t = 0$ esso non raggiungerebbe mai il bersaglio. Infatti la distanza tra il fotone e la particella, misurata in ogni sistema in cui essa è istantaneamente in quiete, è sempre pari a c^2/α ; per provarlo basta applicare una LT attiva opportuna, che trasporti il corpo nell'asse x e di conseguenza il fotone nell'origine.

Notiamo inoltre che nel caso relativistico l'accelerazione propria non è limitata, facendo tendere α a infinito otteniamo la traiettoria di una particella con velocità c .

Capitolo 3

Lo spaziotempo di Minkowski

Già nel primo capitolo abbiamo, un po' inconsciamente, iniziato ad utilizzare una visione statica dell'insieme degli eventi. Il primo a seguire questo approccio fu il grande matematico Poincaré, seguito poi da Minkowski il quale sostituì l'immagine di Einstein e Newton di un universo formato da sistemi inerziali 3D in movimento uniforme con un unico spazio statico e 4D.

La possibilità e l'utilità di fare questa scelta è data dall'esistenza, in relatività ristretta, di una metrica 4D invariante e naturale per lo spaziotempo:

$$\varphi(d\ell) = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.1)$$

Lo spaziotempo di Minkowski, spesso indicato con M^4 , è tuttavia molto più di una costruzione matematica ben funzionante; si è infatti rivelato il nuovo quadro fisico in cui la teoria moderna debba essere contestualizzata.

Questa magnifica 'impalcatura', che occupa l'intero universo, presente, passato e futuro, è tuttavia imputabile della stessa critica mossa contro lo spazio assoluto newtoniano (vedi cap 1): agisce su tutto, ma non è soggetta ad azioni. Einstein risolse anche questo problema, nell'estensione generale della sua teoria dimostrò infatti che è la forza gravitazionale ad agire sullo spaziotempo, torcendolo e curvandolo.

3.1 Diagrammi di Minkowski tridimensionali

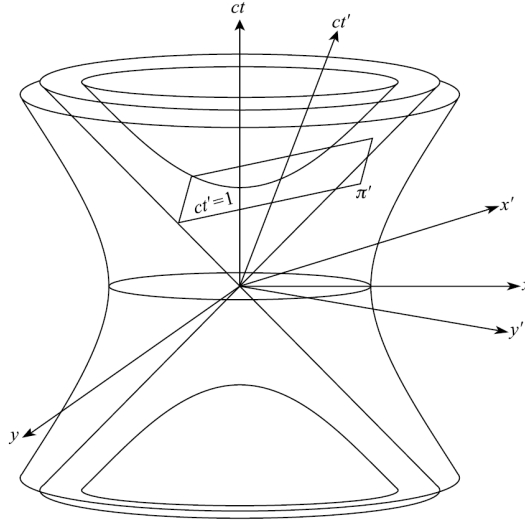
In questa sezione vediamo come estendere i diagrammi già visti nel caso bidimensionale (un' unica dimensione spaziale) aggiungendo ulteriori componenti. È tuttavia chiaro che per ragioni dimensionali, anche utilizzando un disegno in prospettiva, si deve sacrificare una dimensione spaziale ed abituarsi a vedere cerchi come sfere, linee come piani, etc.

Come diagramma di Minkowski 3D spesso si fa riferimento a un sistema cartesiano tridimensionale (x, y, ct) in unità relativistiche, che vengono spesso adottate per avere tutti gli assi con la dimensione di una lunghezza. Come già osservato le *linee universo* delle particelle devono formare angoli inferiori a $\pi/4$ con la verticale in quanto la pendenza relativa all'asse ct è v/c .

In figura possiamo osservare le iperboloidi calibratrici

$$\varphi(\Delta\ell) = c^2 t^2 - x^2 - y^2 = \pm 1 \quad (3.2)$$

e gli iperpiani di simultaneità $ct' = k$, contenenti gli aventi con componente temporale k/c rispetto al sistema di riferimento inerziale S' .



3.2 Coni di luce e intervalli

La struttura invariante fondamentale dello spazio di Minkowski è quella dei *coni di luce*, ciascuno per ogni evento $\mathcal{P}$.

Definizione 3.2.1. Per *cono di luce* relativo all'evento $\mathcal{P}$ si intende l'insieme delle *linee universo* di tutti i fotoni passanti per $\mathcal{P}$, ossia il luogo degli eventi che possono ricevere e inviare luce a $\mathcal{P}$.

Si osservi che una caratterizzazione equivalente è quella dell'insieme dei punti con intervallo Δs nullo dall'evento considerato; dall'invarianza di (2.16) per LT segue che il cono si mantiene invariato in ogni sistema di riferimento inerziale. Notiamo che per $c \rightarrow \infty$ si ottiene lo spazio newtoniano.

Analizziamo un possibile significato fisico della (2.16): riscriviamola intanto come

$$\varphi(\Delta\ell) = \Delta t^2 \left(c^2 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} \right), \quad (3.3)$$

dove la variazione è calcolata tra due eventi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}$; una distinzione può essere fatta innanzitutto in base al segno dello spostamento quadrato.

Il caso $\varphi(\Delta\ell) = 0$ corrisponde a quello in cui i due eventi siano connessi da un segnale luminoso.

Quando $\varphi(\Delta\ell) > 0$ si ha $\Delta r^2/\Delta t^2 < c^2$ in ogni sistema di riferimento, per quanto visto sopra. Ciò implica la possibilità di inviare un orologio ideale a velocità uniforme da un evento all'altro e viceversa. Nel sistema di riferimento S' in cui l'orologio è a riposo, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}$ avvengono nello stesso luogo, perciò $\varphi(\Delta\ell) = c^2 \Delta t'^2$, dove $\Delta t'$ è il *tempo proprio* misurato da un orologio che si muove liberamente da un evento all'altro. Segue che l'intervallo tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}$ è $\Delta s = c \Delta t'$.

Osservazione 3.2.2. Scrivendo $v = dr/dt$, il tempo trascorso su un orologio ideale che si muove arbitrariamente da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{L}$ sia

$$\Delta\tau = \int_{\mathcal{P}}^{\mathcal{L}} \left(dt^2 - dr^2/c^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{P}}^{\mathcal{L}} ds, \quad (3.4)$$

quest'ultima suggerisce una fondamentale interpretazione dell'*intervallo* nella sua forma differenziale: $ds = c d\tau$.

Vediamo infine il caso $\varphi(\Delta\ell) < 0$ corrispondente a $\Delta r^2/\Delta t^2 > c^2$: i due eventi sono ipoteticamente collegati da un segnale superluminoso ed esistono infiniti sistemi di riferimento in cui $\mathcal{P}$ a $\mathcal{L}$ sono simultanei, vale infatti il seguente fatto.

Osservazione 3.2.3. Consideriamo un ipotetico segnale inviato da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{L}$ con velocità $U > c$ rispetto a un sistema S , o equivalentemente supponiamo che l'evento $\mathcal{P}$ provochi $\mathcal{L}$. Non è restrittivo ipotizzare che i due eventi avvengano lungo l'asse x , con una distanza spaziale e temporale di $\Delta x > 0$ e $\Delta t > 0$. Allora in un secondo sistema S' avremmo per le (2.12):

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v U}{c^2} \right) \quad (3.5)$$

e per una v soddisfacente $c^2/U < v < c$ risulterebbe $\Delta t' < 0$. In altre parole esisterebbe un sistema di riferimento inerziale in cui $\mathcal{L}$ precede $\mathcal{P}$ e causa ed effetto sono scambiati; per $v = c^2/U$ invece avremmo che i due eventi sono contemporanei in S' .

Sia quindi S' uno dei sistemi in cui $\mathcal{P}$ a $\mathcal{L}$ sono simultanei. In esso vale $\varphi(\Delta\ell) = -\Delta r'^2$, perciò Δs è la distanza spaziale tra due eventi calcolata nel sistema di riferimento in cui essi sono contemporanei, dalla (2.16) è chiaro che questa sia la minore tra tutti i sistemi considerabili.

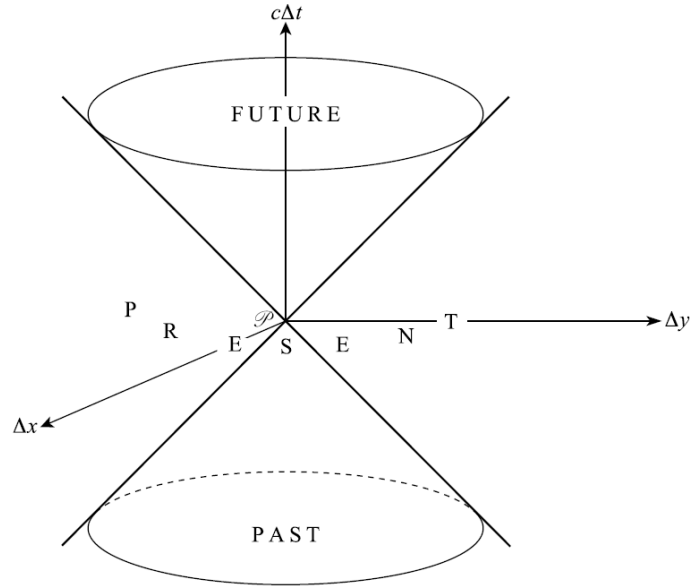


Figura 3.1: Ripartizione dello spaziotempo in base ai rapporti di causalità con $\mathcal{P}$.

Il cono di luce rispetto a un evento $\mathcal{P}$ suggerisce una ripartizione in base ai rapporti di causalità degli altri eventi rispetto a $\mathcal{P}$ stesso. Gli eventi con $\varphi(\Delta\ell) \geq 0$ e $\Delta t > 0$ possono ricevere segnali fisici ed essere influenzati da $\mathcal{P}$, inoltre ciascun osservatore concorda sul fatto che siano accaduti dopo $\mathcal{P}$ e costituiscono quindi il *futuro assoluto (o causale)* di $\mathcal{P}$. Similmente gli eventi con $\varphi(\Delta\ell) \geq 0$ e $\Delta t < 0$ costituiscono il *passato assoluto (o causale)* di $\mathcal{P}$. Poiché nessun evento $\mathcal{S}$ al di fuori di questi due coni può influenzare o essere influenzato da $\mathcal{P}$ in alcun modo ed esiste un S' in cui $\mathcal{P}$ e $\mathcal{S}$ sono contemporanei, la regione in cui $\varphi(\Delta\ell) < 0$ è detta *presente causale* di $\mathcal{P}$.

3.3 Una precisazione sulla contrazione di Lorentz e la definizione di lunghezza

Prima di trattare il concetto di rigidità è importante chiarire quello di ‘Contrazione di Lorentz-Fitzgerald’. Fitzgerald fu il primo, seguito poi da Lorentz, ad ipotizzare una contrazione fisica dei corpi in movimento; tale assunzione mirava ad interpretare i risultati dell’esperimento di Michelson-Morely, ipotizzando il coinvolgimento delle forze tra le particelle costituenti i corpi.

Tuttavia va sottolineato che questa ‘contrazione’ è in contraddizione con la relatività speciale, sebbene le LT ricalchino la stessa equazione. Infatti l’equazione

$$L' = L/\gamma, \quad \text{con } \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (3.6)$$

si riferisce a una lunghezza L , misurata a riposo lungo l’asse x di un sistema inerziale S , e alla stessa lunghezza L' rilevata in un sistema inerziale S' in movimento con velocità v e in configurazione standard rispetto al primo.

Va notato che in questo caso la discrepanza tra i due risultati non è dovuta ad alcun tipo di contrazione fisica, ma solo ad un mero cambiamento di coordinate; questo fatto è cruciale e di facile fraintendimento.

Le LT sono di fatto una ‘rotazione’ nello spaziotempo e in questa lettura L rappresenta solo una componente del quadrivettore ruotato e non di certo un invariante della trasformazione. Secondo questa lettura la contrazione di Lorentz non può in alcun modo provocare stress fisici, come ad esempio quello di Dewan-Baran [6]. Supponiamo per assurdo ciò sia vero, considerando un bicchiere di vetro fragile possiamo immaginare le forze fra le sue molecole come dei fili simili a quello di seta congiungente i razzi considerati da Dewan e Baran. Allora se la contrazione Lorentziana potesse produrre uno stress fisico, basterebbe accelerare lievemente e in modo costante il bicchiere (o equivalentemente farlo fare ad un osservatore) per causare la rottura del vetro ad un certo istante. Ciò tuttavia è in contraddizione con quanto osservato da un osservatore in quiete rispetto al bicchiere e quindi col principio di relatività (vedi [2]).

La concezione di lunghezza come una quantità dipendente dal sistema di osservazione stride un po’ con l’idea di proprietà fisica intrinseca di un oggetto. Per questo, e per la necessità di una ‘lunghezza’ che sia conservata in un movimento rigido, si giunge alla seguente:

Definizione 3.3.1. Si dice *lunghezza a riposo* di un corpo, quella calcolata in un sistema di riferimento inerziale S' in cui il corpo si trova in quiete.

Dall’esempio precedente è chiaro come sia soltanto la lunghezza a riposo ad essere coinvolta in contrazioni e stress fisici. La questione però è sottile e conviene trattare un esempio *ad hoc* per sottolineare degli aspetti che saranno utili in seguito.

3.3.1 Il paradosso di Bell

Tratteremo brevemente l’esperimento mentale ideato da Dewan e Beran e reso poi noto da John Bell [9]. L’esperimento consiste nel far partire due astronavi identiche, inizialmente a riposo in un sistema Lorentziano S , e sottoporle ad un accelerazione $\mathbf{a}(t)$ rispetto ad S . In figura è possibile vedere la situazione più nel dettaglio: le navicelle L e R , con accelerazione $a(t)$ lungo l’asse x di S , aventi inizialmente la punta della prima in $x_L = 0$ e la coda della seconda in $x_R = d$.

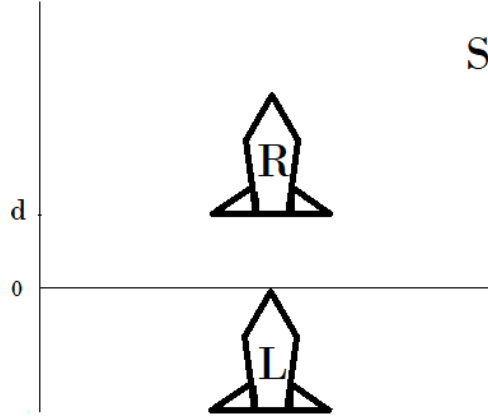


Figura 3.2: IMMAGINE PROVVISORIA

L e R hanno istantaneamente, in S , la stessa velocità, i.e. a $t_L = t_R = t$ si ha $v = v_L = v_R$ e quindi la distanza in S tra le due navicelle spaziali rimane costante e pari a $d := x_R - x_L$. Supponendo ora di ripetere l'esperimento dopo aver attaccato un filo inestensibile alle estremità dei razzi, tale che questo non influenzi la dinamica del sistema, il quesito è quello di capire se il filo si spezzi o meno.

La risposta fornita da Dewan e Beran nel già citato articolo è affermativa e basata su una *contrazione relativistica*. Quest'ultima dovuta al fatto che la distanza d è costante in S , mentre il filo dovrebbe accorciarsi per via della contrazione di Lorentz-Fitzgerald. Vedremo che sebbene la conclusione sia corretta la motivazione fornita è erronea e contraddittoria con la relatività: non è possibile fornire due misure diverse (nello stesso sistema) della stessa lunghezza.

Analizziamo quindi il problema più approfonditamente considerando, nell'istante in cui ogni astronave ha velocità v , le posizioni nel sistema S' in cui i veicoli si trovano a riposo:

$$x'_L = \gamma(x_L - vt), \quad (3.7)$$

$$x'_R = \gamma(x_L + d - vt). \quad (3.8)$$

La distanza fra i le due navicelle in S' è quindi $d' = x'_R - x'_L = \gamma d$.

Osserviamo che questa lunghezza è maggiore di quella misurata inizialmente (prima del moto) in S , perciò all'aumentare della velocità in S la distanza tra le astronavi nel loro sistema di riferimento a riposo S' aumenta. La situazione è quindi differente rispetto a quella normale in cui la lunghezza a riposo è fissa, mentre quella in movimento è accorciata. Qui, per costruzione, la misura presa in movimento è costante mentre quella calcolata nel sistema in cui l'oggetto è fisso varia.

Supponendo quindi che il filo possa estendersi fino a una lunghezza massima d_{max} , la velocità limite oltre la quale il filo si spezza è quella corrispondente a:

$$\gamma(v) = \frac{d_{max}}{d}. \quad (3.9)$$

Osservazione 3.3.2. Si potrebbe obiettare che in S' , sebbene i due corpi siano istantaneamente a riposo, le misurazioni di x'_L e x'_R sono effettuate in istanti diversi e ciò potrebbe influenzare l'analisi del moto. Tuttavia ciò non accade, come mostrato in [2], e la distanza può essere misurata in S' ad istanti diversi anche se le navicelle accelerano.

In conclusione, la rottura del filo è dovuta al fatto che la sua lunghezza propria d' debba aumentare, poiché d è costante e v cresce. La formulazione del paradosso infatti non è altro che la descrizione, rispetto ad S , di un sistema in cui la distanza fra la coda della navicella R e la prua di L aumenta, questo nel riferimento istantaneo (e variabile) S' , che come abbiamo osservato inizialmente è l'unico a cui conviene fare riferimento nel caso di fenomeni di contrazione.

3.4 Movimento rigido e barra uniformemente accelerata

Riprendiamo i concetti visti alla fine del secondo capitolo e consideriamo l'equazione

$$x^2 - c^2 t^2 = X^2, \quad (3.10)$$

con il parametro X che varia con continuità in un intervallo di valori positivi. Essa, per quanto visto precedentemente, rappresenta per ogni fissato valore di X una particella in moto lungo x con un'accelerazione propria costante pari a c^2/X . Considerando l'insieme delle varie equazioni, abbiamo invece una rappresentazione di un'asta che si muove in modo 'rigido' nella seguente accezione (motivata dalle considerazioni della precedente sezione).

Definizione 3.4.1 (di Rigidità secondo Born - semplificata). Un sistema fisico è detto *rigido secondo Born* se la distanza tra gli elementi di cui è composto, calcolata nel sistema in cui il corpo si trova istantaneamente a riposo, resta fissa.

Sebbene quindi ogni elemento di volume infinitesimo che compone il corpo si contragga (non fisicamente!) sempre nella direzione del moto e in modo inversamente proporzionale al suo fattore di Lorentz, considerando il susseguirsi dei sistemi di riferimento in cui l'asta si trova istantaneamente in quiete, si misurerà sempre la stessa dimensione *propria*. Il fatto che la lunghezza a riposo non vari mostra come la definizione sia *intrinseca*.

Osservazione 3.4.2. In generale il moto di un punto di un corpo, in movimento rigido nello spaziotempo di Minkowski, determina quello di tutti gli altri. Se il corpo infatti iniziasse a curvare l'arco descritto dovrebbe accorciarsi mentre il raggio rimanere costante e ciò, a parità di regione angolare descritta, è assurdo.

Ovviamente per garantire la "contrazione" di cui sopra, l'accelerazione propria dovrà essere maggiore nella parte posteriore della sbarra e via via diminuire nel raggiungere la parte anteriore. Abbiamo infatti che se l'accelerazione propria fosse uguale per tutti i punti, allora per la (2.25) anche le accelerazioni calcolate nel sistema iniziale S lo sarebbero e il moto, come abbiamo visto nel paradosso di Bell, sarebbe tutt'altro che rigido.

Per via dell'intrinsecità della definizione data, l'equazione (3.10) non dipende dal sistema di riferimento S' in configurazione standard con S : in ciascuno di questi (conservandosi le linee universo per LT) l'asta è a riposo all'istante $t' = 0$.

Osserviamo in figura la contrazione, rispetto al sistema S , della sbarra che si muove orizzontalmente (si fissa l'istante t in ordinata, si guarda il segmento orizzontale e siccome $\Delta t = 0$ la lunghezza che si osserva è quella euclidea).

I segmenti obliqui rappresentano invece l'oggetto nei vari sistemi di riferimento istantanei; in questi la sbarra è sempre contenuta nella semiretta rappresentante l'ascissa x'

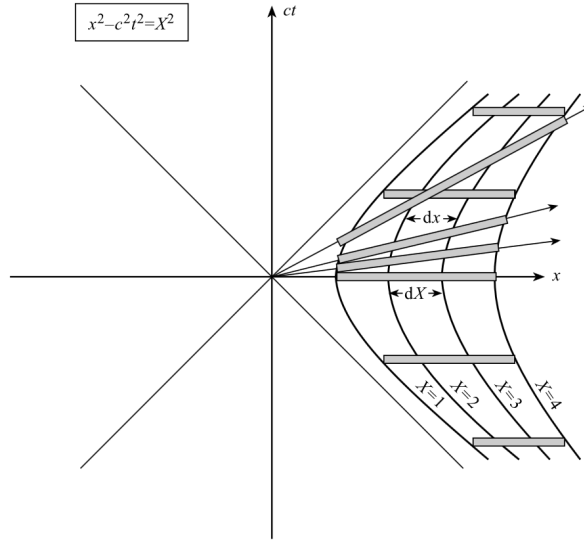


Figura 3.3: L'asta rappresentata dall'insieme (continuo) di iperboli, sono evidenziate alcune visioni istantanee rispetto al sistema S e S' .

del sistema S' che si muove con una certa velocità v - evidenziata dalla pendenza della semiretta - rispetto a S .

Si noti come le iperboli siano da un lato indice della dimensione della sbarra, dall'altro mostrino come la pendenza delle *linee universo* sia costante per x' fissato e la concavità (accelerazione) sia maggiore nel lato posteriore come già osservato.

Un fascio di siffatte aste può essere considerato come un razzo; la vita in una tale navicella sarebbe simile a quella all'interno di un grattacielo in quiete, in cui il campo gravitazionale (in questo caso rappresentato dall'accelerazione propria c^2/X) ha le linee di campo parallele e inversamente proporzionali all'altezza X .

3.5 Le coordinate di Rindler

Prendendo $c = 1$ il moto di una sezione del razzo sopra menzionato è caratterizzato dall'equazione

$$x^2 - t^2 = X^2; \quad (3.11)$$

ciascun punto del razzo corrisponde a un certo $X > 0$, avente accelerazione propria $1/X$.

Avendo visto come le *linee universo* iperboliche siano privilegiate sia da un punto di vista matematico, essendo conservate dalle trasformazioni di Lorentz attive, che fisico, in quanto traiettorie di corpi in moto rettilineo uniforme, è interessante considerare un sistema di coordinate iperboliche in M^4 .

Consideriamo la seguente trasformazione delle coordinate standard x, y, z, t di M^4 nelle nuove X, Y, Z, T , dove T è privo di dimensione:

$$t = X \sinh T, \quad x = X \cosh T, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (X > 0). \quad (3.12)$$

Ciò implica che il reticolo di coordinate coincide con la traiettoria del razzo, infatti dalla (3.12):

$$x^2 - t^2 = X^2, \quad x/t = \coth T \quad (3.13)$$

e la metrica diventa:

$$\varphi(\Delta\ell) = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (3.14)$$

La metrica è statica anche rispetto alle nuove coordinate e possiede un reticolo in cui X, Y, Z misurano la distanza euclidea, nel caso precedente questo corrispondeva a $t = 0$, inoltre tale reticolo si muove in modo *rigido*.

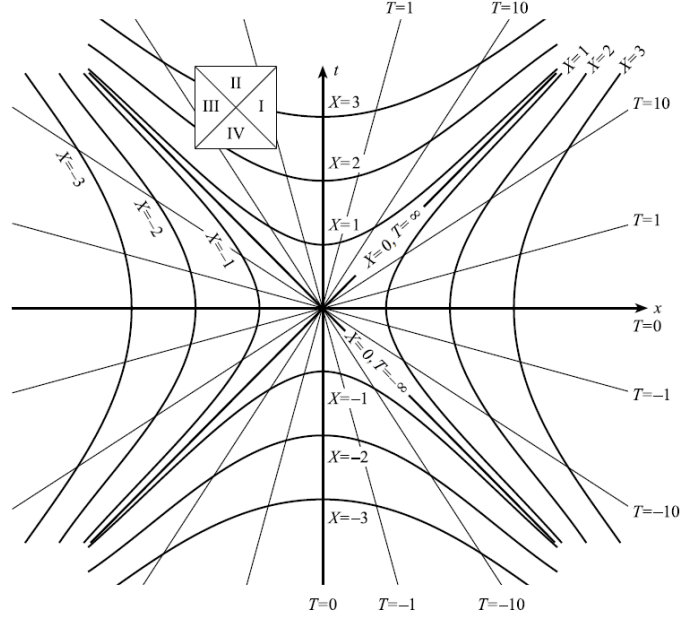


Figura 3.4: Spaziotempo in Coordinate di Rindler

La sezione del “razzo” definita in (3.12) coincide con $x > 0$: un grattacielo unidimensionale e di altezza infinita posto orizzontalmente lungo x e che accelera in tale direzione. L’insieme di infiniti grattacieli di questo tipo forma il reticolo coordinato del razzo. Concentriamoci sulla figura 3.4, nel quadrante I è rappresentato il diagramma di Minkowski del razzo: si osservi come le rette corrispondenti agli istanti “adattati” $T = cost$ siano ortogonali alle *linee universo* dei punti del reticolo (le iperboli).

Le rette inclinate di $\pm \frac{\pi}{4}$ rispetto all’orizzontale, in quanto iperboli degeneri, corrispondono a $X = 0$ e sono denominate *orizzonti*. Essi rappresentano due fronti luminosi: il primo accompagna il razzo nel suo tragitto nella prima ‘mezza eternità’, mentre il secondo fa lo stesso per T positivi. Si osservi che durante tutta la traiettoria l’accelerazione punta lungo il verso positivo dell’asse x , mentre la velocità cambia di intensità e verso; la distanza euclidea dei fronti luminosi dai vari punti del razzo, quando vi sono ‘attaccati’, resta costante e pari a $1/X$, per l’osservazione fatta sotto la (2.28).

È chiaro che questo razzo fornisce un sistema di coordinate solo per il quadrante I, diamo perciò la seguente definizione.

Definizione 3.5.1. Lo spaziotempo con le coordinate (3.12) e ristretto al I quadrante è detto *Spaziotempo di Minkowski in coordinate di Rindler*.

Osservazione 3.5.2. Possiamo descrivere il III quadrante in modo analogo mediante il sistema di coordinate di un razzo che si muove con accelerazione contraria a quello in I.

Per i rimanenti quadranti basta ripetere la stessa costruzione invertendo i seni e coseni in (3.12) e ottenendo una metrica con segnatura $- + - -$.

	I ($X > 0$) e III ($X < 0$)	II ($X > 0$) e IV ($X < 0$)
$t =$	$X \sinh T$	$X \cosh T$
$x =$	$X \cosh T$	$X \sinh T$
$x/t =$	$\coth T$	$\tanh T$
$x^2 - t^2 =$	X^2	$-X^2$
$dt^2 - dx^2 =$	$X^2 dT^2 - dX^2$	$-X^2 dT^2 + dX^2$

Nel II e IV quadrante, i luoghi $T = \text{cost}$ rappresentano una famiglia di iperpiani che si muovono uniformemente con velocità $u = x/t = \tanh T$, aventi quindi rapidità T ; X , invece, misura il tempo proprio trascorso dall'istante in cui essi coincidevano ($t = 0$). D'altro canto nei razzi del primo e terzo quadrante il tempo proprio è indicato da T e la distanza euclidea da X . Osserviamo che tuttavia in questo caso la discrepanza è artificialmente creata scegliendo questa specifica denominazione per le coordinate.

È possibile ricavare una metrica valida per tutto lo spazio operando un cambio di variabile, preso

$$2R - 1 = x^2 - t^2 = \begin{cases} X^2 & \text{(I, III)} \\ -X^2 & \text{(II, IV)} \end{cases} \quad (3.15)$$

otteniamo la seguente metrica valida *ovunque*:

$$ds^2 = (2R - 1)dT^2 - (2R - 1)^{-1}dR^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (3.16)$$

Siccome è possibile utilizzare lo spazio di Rindler per modellizzare lo spaziotempo in presenza di un buco nero, il quale ha una singolarità di curvatura, è conveniente produrre una singolarità artificiale nello spazio di Rindler troncandolo in corrispondenza di $R = 0$ (vedi figura).

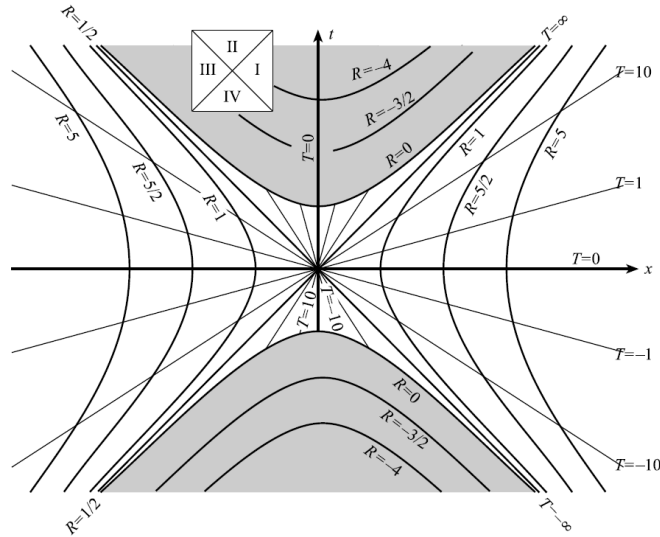


Figura 3.5: Il troncamento di M^4 lungo $R = 0$, non viene considerata la zona $x^2 - t^2 < -1$.

Nello spazio così ottenuto i due rami di iperbole $R = 0$ diventano i limiti passato e futuro dello spaziotempo che, in un certo senso, è un universo di durata finita. Infatti al-

l'interno degli orizzonti (in $[\pi/4, 3/4\pi]$ e $[5/4\pi, 7/4\pi]$) le traiettorie che iniziano nel "limite passato" terminano in un tempo proprio finito nel limite futuro. *Linee universo* di durata infinita sono ammesse solamente all'esterno degli orizzonti e solo da corpi in permanente accelerazione: cosa evidente - per motivi geometrici - dalla figura; si osservi che una volta nel II (o IV) quadrante la traiettoria deve terminare in $R = 0$ perché per uscire dalla regione dovrebbe superare la velocità della luce. È proprio l'accelerazione a prevenire dalla caduta nell'orizzonte e produrre la dilatazione temporale necessaria all'esistenza illimitata.

Anche con queste modifiche, la struttura di M^4 troncato appare a noi osservatori esterni di facile comprensione, dal punto di vista di un passeggero del razzo, invece, la situazione è più complessa. Vive in un mondo immutabile - la luce dell'orizzonte resta alla stessa distanza - e sebbene la metrica più conveniente a lui sia (3.14) per nostra fortuna si trova bene anche con (3.16). Dal suo punto di vista le particelle cadute da un ascensore aperto cadono in uno spazio 'interno' $R < \frac{1}{2}$, in cui il tempo R diminuisce costantemente. Gli abitanti del razzo hanno però anche bisogno di una regione in cui R aumenta, per spiegare l'origine delle particelle che sono loro inviate.

Abbiamo quindi visto come, a volte, utilizzare un opportuno sistema di coordinate contribuisca non solo ad una semplificazione algebrica, ma anche a dare un'interpretazione fisica precisa: in questo caso quella di un sistema in moto rigido e uniformemente accelerato. La condizione di rigidità, tuttavia, non può sempre essere mantenuta, e.g. in presenza di grandi masse (come quella di un buco nero) un corpo verrebbe inevitabilmente deformato. È naturale perciò interrogarsi sull'effettiva esistenza di corpi rigidi, l'universo stesso infatti è in accelerazione ed espansione; un'analisi sulle condizioni necessarie a un corpo per rimanere rigido in un Universo cosmologico in espansione può essere trovata in [1].

Per rispondere a questa domanda occorrono strumenti che esulano dall'obiettivo di questo elaborato, tuttavia nel prossimo capitolo cercheremo di approfondire il concetto di rigidità e di accennare una sua possibile generalizzazione.

Capitolo 4

Rigidità Relativistica

Un sistema rigido nello spaziotempo *classico* ha 6 gradi di libertà: 3 traslazioni e 3 rotazioni. In altri termini, in fisica classica, nella costruzione di una *congruenza* - i.e. un insieme di linee universo che rappresentano uno sciame di particelle test in caduta libera - ci sono 6 gradi di libertà per avere fissata la distanza tra i punti della congruenza.

In quest'ottica nel 1909 Born propose la definizione di moto rigido in ambito relativistico, dove però la “distanza invariante” è quella ortogonale tra linee universo misurata con la metrica di Minkowski.

In questo capitolo vedremo brevemente come è possibile definire la rigidità di Born in un contesto più generico e come Herglotz [7] e Noether [8] provarono l'esistenza dei moti rigidi secondo Born, mostrando anche che la struttura causale dello spaziotempo relativistico riduce i gradi di libertà a 3.

4.1 Rigidità secondo Born

Vediamo ora una formulazione più generale e complessa della rigidità secondo Born, per farlo saranno necessarie delle conoscenze di relatività generale e calcolo tensoriale che daremo per presupposte (vedi ad esempio [4]).

Si consideri un sistema relativistico rappresentato da una congruenza $\mathcal{C}$ omeomorfa a $\mathbb{R} \times S^2$ (un tubo di linee universo). Dato un modello di spaziotempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$ sia $u^a(x)$ il campo vettoriale unitario tangente alle linee universo. Quest'ultimo e g_{ab} inducono una 3-metrica locale in $\mathcal{C}$: $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$.

Sia $\xi^a \in \text{span}\langle u^a \rangle^\perp$ un vettore di connessione, quindi

$$h_{ab}\xi^a = g_{ab}\xi^a + u_a u_b \xi^a = g_{ab}\xi^a \quad (4.1)$$

e $h_a^b \xi^a = \xi^b$. Per definizione ξ^a Lie-trasportato, ossia

$$(\mathcal{L}_u \xi)^a = [u, \xi]^a = u^b \nabla_b \xi^a - \xi^b \nabla_b u^a = 0. \quad (4.2)$$

Definiamo ora un'opportuna distanza per valutare la posizione reciproca delle linee universo della congruenza: $l^2 := g_{ab}\xi^a \xi^b = h_{ab}\xi^a \xi^b$; possiamo utilizzare la variazione temporale di questa quantità lungo “l'asse temporale” della congruenza per definire una nozione di rigidità.

Definizione 4.1.1 (Rigidità secondo Born). Diremo che un sistema fisico, rappresentato con una congruenza $\mathcal{C}$ con quadrivelocità u^a , è *rigido secondo Born* se le distanze spaziali ortogonali a u non variano lungo la congruenza, ossia $u^a \nabla_a l = 0$.

Possiamo scrivere la derivata covariante di u^a come:

$$\nabla_b u_a = h_a^c h_b^d \nabla_d u_c - \alpha_a u_b = \Theta_{ab} + \omega_{ab} - \alpha_a u_b, \quad (4.3)$$

dove $\omega_{ab} := h_a^{a'} h_b^{b'} u_{[b'; a']}$ è la *vorticità*, $\Theta_{ab} = h_a^{a'} h_b^{b'} u_{(a'; b')}$ il *tensore di espansione* e $\alpha^a := u^b \nabla_b u^a$ l'*accelerazione* della congruenza.

Derivando si ricava

$$u^a \nabla_a l^2 = 2\Theta_{ab} \xi^a \xi^b. \quad (4.4)$$

CARATTERIZZAZIONE

4.2 Risultati generali

Abbiamo accennato a come la struttura causale dello spaziotempo relativistico limiti i gradi di libertà dei corpi rigidi¹. Le trasformazioni che mantengono la rigidità dipendono anche dalla metrica dello spaziotempo.

In uno spaziotempo con simmetrie ci sono infatti direzioni preferenziali ed individuate dai vettori di Killing della metrica, ossia dai campi vettoriali che preservano la metrica e generano i gruppi di isometrie.

Definizione 4.2.1. Sia $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un gruppo a 1-parametro di isometrie, i.e. $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$,² allora il campo vettoriale T associato al gruppo è detto *di Killing*, dove

$$T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{TM}, \quad \text{tale che} \quad T(p) := \dot{\phi}_t(p) \Big|_{t=0} \quad (4.5)$$

e $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, con $\phi_0(p) = p$.

Vale inoltre la seguente caratterizzazione:

Proposizione 4.2.2. *Un campo vettoriale T è di Killing se e solo se soddisfa l'equazione di Killing*

$$\nabla_a T_b + \nabla_b T_a = 0, \quad (4.6)$$

dove ∇_a è l'operatore di derivazione associato a g_{ab} .

Dimostrazione. Basta osservare che

$$0 = \mathcal{L}_T g_{ab} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_{-s}^* g_{ab} - g_{ab}}{s} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* g_{ab} - g_{ab}}{t} \quad (4.7)$$

ovunque, se e solo se $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$. E infine

$$\mathcal{L}_T g_{ab} = T^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a T^c + g_{ac} \nabla_b T^c \quad (4.8)$$

$$= \nabla_a T_b + \nabla_b T_a. \quad (4.9)$$

□

Un vettore di Killing T^a di tipo tempo genera una congruenza $\mathcal{C}$ avente quadrivelocità $u^a := T^a / |T|$, tale congruenza si dice che segua un *moto isometrico o di Killing*.

Vi è una connessione diretta fra le simmetrie dello spaziotempo e il moto rigido di una congruenza. $\mathcal{C}$ infatti rappresenta delle particelle che cadono liberamente, perciò con distanza reciproca fissa a patto che la metrica non vari: condizione verificata muovendosi lungo un vettore di Killing.

¹Intesi come corpi in moto rigido.

²Bisognerebbe mostrare come estendere ϕ^* ai tensori $(k, 0)$

Teorema 4.2.3. *Ogni congruenza $\mathcal{C}$ generata da un vettore di Killing T^a è rigida secondo Born.*

Dimostrazione. Sia $u^a = T^a/|T|$ la quadrivelocità di $\mathcal{C}$ e $T_a = |T|u_a$ il covettore di Killing. Utilizzando la (4.6) e derivando abbiamo

$$\left(\nabla_{(a}|T|\right)u_{b)} + |T|\nabla_{(b}u_{a)} = 0, \quad (4.10)$$

contraendo u^b si ottiene

$$(u^b\nabla_b|T|)u_a - \nabla_a|T| + |T|\alpha_a = 0. \quad (4.11)$$

Proiettando nuovamente su u^a si ha $u^b\nabla_b|T|)u_a$ che insieme alla (4.11) implica

$$\alpha_a = \frac{\nabla_a|T|}{|T|}. \quad (4.12)$$

Infine sostituendo quest'ultima nella (4.10) abbiamo:

$$|T|\left(\alpha_{(a}u_{b)} + \nabla_{(b}u_{a)}\right) = 0 \quad (4.13)$$

e siccome $|T| \neq 0$ il moto di Killing soddisfa le equazioni di Rigidità secondo Born³. □

Si osservi che una combinazione lineare di vettori di Killing con coefficienti costanti è un vettore di Killing, quindi per il teorema 4.2.3 dati i vettori T^a e $\bar{T}^a$ la quadrivelocità

$$u^a := (\alpha T^a + \beta \bar{T}^a)/|\alpha T^a + \beta \bar{T}^a|, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

rappresenta un moto rigido se u^a è di tipo tempo.

Un corollario del teorema 4.2.3 è il seguente.

Corollario 4.2.4. *Data una congruenza $\mathcal{C}$, rigida e con quadrivelocità u^a in uno spazio-tempo arbitrario, allora $\mathcal{C}$ segue un moto di Killing se e solo se*

$$\nabla_{[a}\alpha_{b]} = 0. \quad (4.15)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima il ‘solo se’. Per il teorema 4.2.3 vale la (4.12) e quindi

$$\alpha_a = \nabla_a\Phi, \quad (4.16)$$

avendo posto $\Phi := \log(|T|)$. Derivando si ottiene la (4.15).

Viceversa se $\nabla_{[a}\alpha_{b]} = 0$ l'accelerazione è un differenziale esatto, che di nuovo implica la validità della condizione (4.16). Utilizzando quest'ultima e la condizione di rigidità $\alpha_{(a}u_{b)} + \nabla_{(b}u_{a)} = 0$, si riottiene l'equazione di Killing ripercorrendo a retroso i passaggi della dimostrazione del teorema 4.2.3. □

Definizione 4.2.5. I moti rigidi possono essere distinti in *rotazionali*, se $\omega_{ab} \neq 0$ o *irrotazionali* se $\omega_{ab} = 0$.

Definizione 4.2.6. Uno spazio è detto *massimamente simmetrico* se contiene il massimo numero di vettori di Killing, ossia quello relativo ad $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.⁴

³metti riferimento o fai un lemma

⁴CHIEDI PER UN RIFERIMENTO

Per uno spazio massimamente simmetrico quadrimensionale vale il seguente risultato:

Lemma 4.2.7. *Dato un corpo rigido secondo Born con quadrivelocità u^a , in uno spazio-tempo quadridimensionale e massimamente simmetrico, la derivata di Lie della vorticità è nulla:*

$$\mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0. \quad (4.17)$$

Dimostrazione. Si consideri la derivata di Lie della connessione di Levi-Civita in direzione di una campo vettoriale di tipo tempo u^a . Esplicitamente abbiamo

$$\mathcal{L}_u \Gamma_{ab}^c = \nabla_b \nabla_a u^c + R_{abk}^c u^k, \quad (4.18)$$

dove Γ_{ab}^c e R_{abk}^c sono rispettivamente i simboli di Christoffel e il tensore di Riemann. Prendendo il commutatore della (4.18) si mostra⁵

$$2\nabla_{[a} \mathcal{L}_u \Gamma_{b]}^c = \mathcal{L}_u R_{bad}^c. \quad (4.19)$$

Possiamo riscrivere la vorticità come

$$\omega_{ab} := h_a^{a'} h_b^{b'} \nabla_{[b'} u_{a']} = h_a^{a'} h_b^{b'} \gamma_{[a'b']}^k u_k, \quad (4.20)$$

perciò applicando due volte il proiettore h_b^a sulla (4.19) ed utilizzando la condizione di rigidità $\mathcal{L}_u h_b^a = 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u (\omega_{ab} \omega_{cd} + \perp R_{abcd}) = 0, \quad (4.21)$$

dove $\perp R_{abcd}$ è il tensore di Riemann proiettato su h_{ab} . Per uno spazio massimamente simmetrico esiste una costante C_0 tale che

$$R_{abcd} \equiv C_0 (g_{ab} g_{cd} - g_{ac} g_{bd}); \quad (4.22)$$

quindi $\mathcal{L}_u \perp R_{abcd} = 0$, siccome il moto è rigido e vale $(\mathcal{L}_u h)_{ab} = 0$. Contraendo infine con la vorticità si conclude;

$$\mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0. \quad (4.23)$$

□

Questo lemma dimostra formalmente quanto affermato nell'osservazione 3.4.2, ossia l'impossibilità per un corpo rigido di ruotare senza deformarsi. Questo fatto è noto come *paradosso di Eherenfest* ed è il motivo per cui un moto rigido nello spaziotempo relativistico ha solamente tre gradi di libertà.

Concludiamo questa sezione dimostrando il teorema di Herglotz-Noether.

Teorema 4.2.8 (Herglotz-Noether). *Una congruenza $\mathcal{C}$ in moto rotazionale e rigido in uno spazio massimamente simmetrico, segue un moto di Killing, i.e. esiste un vettore di Killing di tipo tempo che genera $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Per la definizione di tensore di Riemann abbiamo

$$\nabla_a \nabla_b u_c - \nabla_b \nabla_a u_c = R_{cba}^k u_k, \quad (4.24)$$

proiettando su u^a e prendendo la parte antisimmetrica ricaviamo:

$$u^c \nabla_c \omega_{ab} = u^c \nabla_c (\alpha_{[a} u_{b]}) + \nabla_{[b} u_{a]} - \alpha^c \omega_{c[a} u_{b]}. \quad (4.25)$$

⁵conti

Moltiplicando ora per ω^{ab} , utilizzando il lemma 4.2.7 e il fatto che la vorticità è antisimmetrica si ha

$$\omega^{ab}\nabla_{[b}\alpha_{a]} = 0. \quad (4.26)$$

Da ciò segue che in generale un moto rigido ha $\nabla_{[b}\alpha_{a]} = 0$ e questo per il corollario implica che il moto sia di *Killing*. $\square$

Da questi risultati si evince come il moto rotazionale e rigido secondo Born sia molto vincolato. Per questo motivo recentemente è stata formulata una definizione di *rigidità quasilocale* la quale è meno forte rispetto a quella di Born ed ammette sei gradi di libertà come nel caso di uno spaziotempo classico.

4.3 Conclusioni

In questo elaborato abbiamo quindi analizzato il concetto di rigidità nella definizione di Born. Abbiamo visto come questo approccio sia utile per interpretare e studiare anche casi controversi come quello descritto nel paradosso di Bell. Si è visto anche come il moto di un'asta rigida secondo Born sia facilmente descrivibile algebricamente nello spaziotempo di Minkowski e suggerisca l'utilizzo delle coordinate di Rindler. Queste non sono altro che coordinate iperboliche in M^4 , ma forniscono un'utile strumento per studiare sistemi non banali come il moto in prossimità di un buco nero.

D'altro canto in quest'ultimo capitolo abbiamo visto come la condizione di rigidità imposta da Born sia molto restrittiva e nel caso relativistico vincoli fortemente i gradi di libertà di un corpo rigido. Per questo motivo recentemente sono state proposte e studiate altre definizioni di rigidità (in contesto relativistico), tra cui la *rigidità quasi-locale*.

Bibliografia

- [1] L. Combi, G. E. Romero, *Relativistic Rigid System and the Cosmic Expansion*, Springer Science (2020)
- [2] J. Franklin, *Lorentz contraction, Bell's spaceships and rigid body motion in special relativity*, European Journal of Physics **31**, 291-298 (2010)
- [3] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press (2006)
- [4] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984)
- [5] P. J. Nawrocki, *Stress Effects due to Relativistic Contraction*, American Journal of Physics **30**, 771-772 (1962)
- [6] E. Dewan, M. Beran, *Note on Stress Effect due to Relativistic Contraction*, American Journal of Physics **27**, 517-518 (1959)
- [7] G. Herglotz, *Annalen der Physik* **336**(2), 393-415 (1910)
- [8] F. Noether, *Annalen der Physik* **336**(5), 919-944 (1910)
- [9] J. S. Bell, *How to teach special relativity*, Progress in Scientific culture 1(2), 1–13 (1976)