
SCUOLA SUPERIORE DI UDINE
UNIVERSITÀ DI UDINE

Corso interno di Analisi Pura e Applicata
Corso di Laurea in Matematica

Meccanica Celeste

Relatore:

Prof.ssa Rodica Toader

Presentata da:

Nicola Dal Cin

Anno Accademico
2018 - 2019

Indice

1	Il problema di Keplero	5
1.1	Il problema dei due corpi	5
1.2	Il potenziale efficace	7
1.3	Prima Legge di Keplero	9
1.4	Classificazione delle orbite a partire dall'energia	10
1.5	Seconda Legge di Keplero	11
1.6	Terza Legge di Keplero	12
1.7	Orbite non Newtoniane	13
1.8	Legge oraria e l'equazione di Keplero	18
2	Il problema dei tre corpi	23
2.1	Il problema circolare ristretto	24
2.2	I cinque punti di equilibrio di Lagrange	26
3	Accenno al caso generale: il problema degli n corpi	29
3.1	Descrizione del problema	29
3.2	Punti di equilibrio	32
3.3	Collasso totale	33
A	Geometria	36
A.1	Equazione cartesiana di una conica	36
A.2	Equazione di una conica in coordinate polari	37
B	Analisi Matematica	39
B.1	Sviluppo in serie di Fourier	39

Introduzione

La meccanica celeste è una delle branche più antiche della fisica matematica e si occupa dello studio e modellizzazione matematica del moto dei corpi celesti. In questo elaborato verranno trattati, prevalentemente con un approccio analitico, i principali ed elementari risultati della materia, cercando però sempre di evidenziare l'utilità applicativa e la natura fisica dei risultati.

Nel primo capitolo analizzeremo il moto dei pianeti attorno al Sole il quale, come vedremo, ci ricondurrà allo studio del moto di una particella in un campo centrale Newtoniano (ma anche più generico), noto anche come *Problema di Keplero*. Ricaveremo quindi le tre leggi di Keplero¹, che descrivono qualitativamente la rivoluzione dei pianeti attorno al Sole, e una legge oraria del moto.

Vedremo poi che aggiungendo un pianeta al sistema, andando quindi a trattare il *problema dei tre corpi*, la complessità del problema cresce considerevolmente. La semplicità del suo enunciato e gli sviluppi teorici volti alla sua risoluzione, hanno contribuito a renderlo noto come “*il più celebre tra i problemi della dinamica*”². Inoltre non esiste una soluzione analitica al caso generale e sebbene nel 1912 il matematico finlandese Karl F. Sundman provò l'esistenza di una soluzione in serie di potenze, quest'ultima converge molto lentamente e non fornisce alcuna informazione qualitativa sul comportamento del sistema.

Negli anni il tentativo di studio del problema generale dei tre corpi è stato accompagnato dall'indagine e la risoluzione di diversi casi particolari. Tali studi si sono rivelati profondamente interessanti e utili per le loro applicazioni; gli ultimi risultati sono stati pubblicati nel 2018³, più di due secoli dopo le prime soluzioni trovate da Eulero e Lagrange.

Nel secondo capitolo vedremo quindi l'analisi del *problema dei tre corpi ristretto*, in cui una delle masse è supposta trascurabile⁴. Si osserverà come

¹Le prime due furono da lui pubblicate nell'*Astronomia Nova*, 1609 e l'ultima nell'*Harmonices mundi libri quinque*, 1919.

²E. T. Whittaker, *A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, 1937.

³Xiaoming Li, Shijun Liao, *Collisionless periodic orbits in the free-fall three-body problem*, 21 May 2018.

⁴Faremo inoltre un'altra ipotesi restringendoci (solamente per comodità espositiva) al caso in cui le orbite dei due pianeti primari siano circolari.

questo caso, sebbene non generale, sia molto importante per varie applicazioni, infatti rappresenta con buona approssimazione un sistema formato da Sole, Terra e un satellite artificiale.

Infine nel terzo capitolo accenneremo al caso di n corpi, del quale indagheremo l'esistenza di punti di equilibrio e la stabilità del sistema. Tale generalizzazione ci permetterà di dedurre anche degli importanti risultati sulla genesi del Sistema Solare e la sua stabilità.

Notazione

Gli insiemi sono indicati nel seguente modo:

- $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali;
- $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali;
- $\mathcal{C}^n([a, b])$ indica l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$, derivabili n volte su (a, b) con le prime n derivate prolungabili con continuità su $[a, b]$.

Per variabili e funzioni vettoriali saranno utilizzate le lettere minuscole, mentre la norma di tali vettori sarà intesa rispetto al prodotto scalare standard e indicata con $|\cdot|$.

I simboli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\times$ indicano gli operatori di prodotto scalare (standard) e vettoriale.

Per le derivate parziali è utilizzata la notazione di Leibniz, mentre le derivate rispetto al tempo sono nella maggior parte dei casi indicate con un singolo o doppio puntino sopra la funzione.

Con il simbolo ∇ riferito ad una funzione si intenderà il suo gradiente, ossia il vettore avente come componenti le derivate parziali della funzione. Ad esempio

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

dove f è una funzione scalare e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Capitolo 1

Il problema di Keplero

Tratteremo nella prima parte di questo capitolo il problema dei due corpi, ossia di due particelle che si attraggono reciprocamente attraverso forze centrali.

Questo sistema modella anche il movimento dei pianeti attorno al Sole e fu perciò studiato con particolare interesse fin dal XVII secolo.

Vedremo poi che questa analisi si ridurrà alla risoluzione del problema di Keplero, ossia lo studio del moto di un punto materiale di massa μ in un campo centrale con potenziale di energia $U(r) \propto \frac{1}{|r|}$, dove $r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è la posizione del punto nello spazio.

Ci concentreremo quindi sul dimostrare le Leggi di Keplero ed infine ricaveremo la legge oraria del moto.

1.1 Il problema dei due corpi

Se vogliamo studiare il movimento di un pianeta attorno al Sole, possiamo ricondurci allo studio di un modello semplificato e più facilmente gestibile. La massa del Sole è tale da rendere trascurabile l'attrazione gravitazionale degli altri singoli pianeti su quello considerato.

Giusto per farsi un'idea la massa totale dei pianeti del Sistema Solare non è nemmeno un millesimo di quella della stella. Il modello che descrive l'orbita di un pianeta attorno al Sole è quindi, con discreta approssimazione, quello del movimento di due corpi, di massa m e M (dove $M \gg m$), che si muovono sotto la reciproca attrazione gravitazionale.

Consideriamo due particelle puntiformi di massa m_1, m_2 in $\mathbb{R}^3$ che si muovono secondo la reciproca attrazione gravitazionale.

Prendiamo un sistema di riferimento con origine nel centro di massa, se $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sono le posizioni dei due pianeti abbiamo che nel nuovo sistema di riferimento:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0;$$

definendo $r = r_2 - r_1$ si ricavano

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}r & r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}r \\ v_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}v & v_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}v \end{aligned}$$

dove $v = \frac{dr}{dt}$.

L'energia cinetica del sistema diventa

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$$

dove $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ è detta *massa ridotta* del sistema. L'energia potenziale è

$$U(r) = -G\frac{m_1m_2}{|r|} = -G\frac{\mu(m_1 + m_2)}{|r|},$$

dove G è la costante di gravitazione universale, e perciò l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

è la stessa di quella di un corpo di massa μ in un campo gravitazionale centrale (ossia diretto verso un punto *fisso*).

Il problema dei due corpi può essere risolto considerandolo come risultato della somma del moto di un corpo in un campo centrale e del moto del centro di massa.

Indichiamo ora con $\omega \in \mathbb{R}^3$ la velocità angolare con cui i due corpi ruotano intorno all'asse passante per il loro centro di massa e perpendicolare al piano che li contiene. Il momento angolare è

$$|L| = I_1|\omega| + I_2|\omega| = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)|\omega| = \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)r^2|\omega| = \mu r^2|\omega|.$$

L si conserva in quanto

$$\frac{dL}{dt} = \tau = r \times F = r \times -G\frac{\mu(m_1 + m_2)}{|r|^3}r = 0$$

ciò semplifica molto la trattazione del problema, la conservazione della direzione di L implica infatti che la traiettoria sia una curva piana.

Mostriamo ora velocemente che un campo centrale qualsiasi è conservativo.

Lemma 1.1.1. Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con

$$F(r) = f(|r|) \frac{r}{|r|}, \quad f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},$$

un campo vettoriale centrale, allora F è conservativo.

Dimostrazione. Basta mostrare che F ammette un potenziale, ossia una funzione

$$U(r) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $F(r) = \nabla U(r)$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definiamo

$$U(r) := \int_0^{|r|} f(\rho) d\rho.$$

Siccome

$$r = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad |r| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(r) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{|r|} f(\rho) d\rho = \frac{\partial}{\partial |r|} \left(\int_0^{|r|} f(\rho) d\rho \right) \frac{\partial |r|}{\partial x_i} = f(|r|) \frac{x_i}{|r|}.$$

Si ha dunque che

$$\nabla U(r) = f(|r|) \frac{r}{|r|} = F(r).$$

□

Dalla conservatività del campo gravitazionale segue che $\frac{dE}{dt} = 0$, abbiamo quindi che il momento angolare e l'energia meccanica sono invarianti del moto.

1.2 Il potenziale efficace

Avendo mostrato come lo studio del Problema di Keplero sia importante anche per la risoluzione del problema dei due corpi, da qui in avanti ci concentreremo sulla sua risoluzione.

L'energia totale di una massa puntiforme che si muove in un campo centrale è

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu v_r^2 + \frac{1}{2} \mu v_t^2 + U(r),$$

dove la velocità è stata scomposta in due componenti ortogonali: la velocità radiale v_r , con $|v_r| = \frac{d|r|}{dt}$, e la velocità perpendicolare al raggio vettore

$v_t = \dot{\theta} \times r$, dove $\dot{\theta}$ è la velocità angolare.

Abbiamo che $|L| = \mu|r||v_t| = \mu r^2 |\dot{\theta}|$, possiamo dunque sostituire ottenendo:

$$E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

Ora avendo

$$E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{|r|},$$

possiamo fare qualche considerazione sull'attrazione gravitazionale che un corpo di massa M esercita su quello di massa μ .

Tracciamo il grafico di $U_{ef} := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{|r|}$, detto *potenziale efficace*. Si

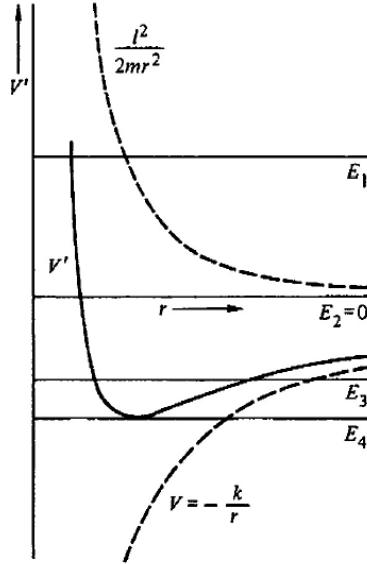


Figura 1.1: Grafico potenziale efficace

osservi che, fissati il potenziale efficace e l'energia, i valori raggiungibili nel grafico sono quelli sotto la linea che indica l'energia, poiché viene aggiunta una quantità sempre positiva.

- $E = E_4$, c'è un solo punto in cui il grafico interseca la retta orizzontale, perciò $r = \text{cost}$ e quindi l'orbita sarà circolare.
- $E = E_3$ c'è solo un intervallo limitato in cui $U_{ef} < E_3$, l'orbita è quindi limitata. Vedremo poi che questo caso corrisponderà a un'orbita ellittica.

- $E = E_2 = 0$, si evince dal grafico che è possibile raggiungere $r \rightarrow \infty$ mentre a sinistra si può raggiungere solo un certo $r_{min} \neq 0$ poiché dev'essere soddisfatta la conservazione del momento angolare.
- $E = E_1 > 0$, come nel precedente caso l'orbita non è limitata.

Fatta questa premessa passiamo alla dimostrazione delle leggi di Keplero.

1.3 Prima Legge di Keplero

La prima legge di Keplero descrive qualitativamente l'orbita di un pianeta in un campo centrale, avendo visto già che in questo caso il momento angolare si conserva¹, possiamo concludere che il movimento si svolge su un'orbita piana.

Convien così prendere un riferimento cartesiano con l'origine nel centro del campo vettoriale e piano XY coincidente con quello orbitale.

Teorema 1.3.1. *Sia $x = x(t)$, $t \in I$, un' orbita in un campo gravitazionale Newtoniano:*

$$\ddot{x} = -\frac{k}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

con $k > 0$ e momento angolare $L = \mu c \neq 0$. Allora x si muove in una conica con un fuoco nell'origine.

Prima di dimostrare questo risultato mostriamo qualche fatto preparatorio.

Lemma 1.3.2. *Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Allora:*

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u,$$

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

Dimostrazione Lemma. (i) Sapendo che il prodotto vettoriale può essere calcolato tramite il determinante di una matrice delle componenti dei vettori e dei versori della base canonica (con un abuso di notazione), il risultato segue dopo qualche passaggio.

(ii) Dalla definizione di prodotto vettoriale $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$, dove (u, v, w) è la matrice quadrata avente le componenti dei tre vettori come colonne, allora

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) = -\det(u, w, v) = \det(v, w, u)$$

¹tralasciando il caso banale in cui $c = 0$

1.4. CLASSIFICAZIONE DELLE ORBITE A PARTIRE DALL'ENERGIA 10

$$= \langle v \times w, u \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

□

Dimostrazione Teorema. Usando la prima equazione del precedente lemma scriviamo l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) &= \frac{\dot{x}|x|^2 - \langle \dot{x}, x \rangle x}{|x|^3} = \frac{(x \times \dot{x}) \times x}{|x|^3} \\ \frac{d}{dt} \left(k \frac{x}{|x|} \right) &= - \left[c \times \left(-\frac{kx}{|x|^3} \right) \right] = -c \times \ddot{x} = \frac{d}{dt} (-c \times \dot{x}). \end{aligned}$$

Integrando otteniamo:

$$k \left(\frac{x}{|x|} + e \right) = -c \times \dot{x}, \quad e \in \mathbb{R}^2.$$

Moltiplicando per x , e ricordando la seconda equazione del lemma precedente, si ha infine

$$k \frac{\langle x, x \rangle}{|x|} + k \langle e, x \rangle = \langle -c \times \dot{x}, x \rangle = \langle -c, \dot{x} \times x \rangle = \langle -c, -c \rangle = |c|^2.$$

Perciò la traiettoria $x(t)$ è una conica di equazione:

$$|x(t)| + \langle e, x(t) \rangle = \frac{|c|^2}{k}.$$

□

Il vettore e è detto *occhio di eccentricità* ed è una costante del movimento. La traiettoria $x(t)$ varia a seconda del modulo di e :

- $e = 0$: orbita circolare
- $|e| < 1$: orbita ellittica
- $|e| = 1$: orbita parabolica
- $|e| > 1$: orbita iperbolica.

1.4 Classificazione delle orbite a partire dall'energia

Vediamo ora che la traiettoria percorsa da un corpo dipende dalla sua energia meccanica. Sia $E = \frac{1}{2}\mu|\dot{x}(t)|^2 - \frac{k\mu}{|x(t)|}$ l'energia meccanica di una particella di massa μ sotto l'azione di un campo Newtoniano. Come visto in precedenza, vale:

$$k \left(\frac{x}{|x|} + e \right) = -c \times \dot{x}$$

prendendo le norme al quadrato

$$k^2 \left| \frac{x}{|x|} + e \right|^2 = |c \times \dot{x}|^2.$$

Visto che $\langle c, \dot{x} \rangle = 0$ abbiamo $|c \times \dot{x}| = |c||\dot{x}|$, perciò

$$k^2 \left[1 + |e|^2 + 2 \left\langle e, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right] = |c|^2 |\dot{x}|^2.$$

Ora ricaviamo $\langle e, x \rangle$ dall'equazione della traiettoria e $|\dot{x}|^2$ dall'energia meccanica, sostituendo:

$$k^2 \left[1 + |e|^2 + \frac{2|c|^2}{k|x|} - 2 \right] = |c|^2 \left(2 \frac{E}{\mu} + 2 \frac{k}{|x|} \right),$$

e infine

$$k^2 [|e|^2 - 1] = 2 \frac{E}{\mu} |c|^2.$$

Quindi

$$1 - |e|^2 = \frac{-2E|c|^2}{\mu k^2}. \quad (1.1)$$

Dato che stiamo supponendo che il movimento non sia rettilineo $c \neq 0$, deduciamo così:

- $E < 0 \Leftrightarrow |e| < 1$: orbita ellittica
- $E = 0 \Leftrightarrow |e| = 1$: orbita parabolica
- $E > 0 \Leftrightarrow |e| > 1$: orbita iperbolica.

Poiché l'energia meccanica di un pianeta in orbita attorno al sole è negativa, abbiamo il seguente corollario:

Corollario 1.4.1 (Prima Legge di Keplero). *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

1.5 Seconda Legge di Keplero

Teorema 1.5.1 (Seconda Legge di Keplero). *Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*

Dimostrazione. Consideriamo un sistema di riferimento centrato nell'origine del campo gravitazionale e tale che l'orbita del pianeta intorno al sole avvenga nel piano XY . Sia $x(t)$ la posizione (raggio vettore) del pianeta lungo la sua orbita in un determinato istante e $x(t + \Delta t)$ la sua posizione in un istante

successivo. Per un intervallo Δt sufficientemente piccolo l'area del settore compreso tra $x(t)$, $x(t + \Delta t)$ e la porzione di traiettoria percorsa tende a

$$\Delta A \simeq \frac{1}{2}|x||\Delta x| \sin \theta \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

dove θ è l'angolo compreso tra $x(t)$ e Δx . Se Δt tende a 0:

$$dA \simeq \frac{1}{2}|x||dx| \sin \theta = \frac{1}{2}|x||\dot{x}| \sin \theta dt.$$

La *velocità areolare*, l'area spazzata per unità di tempo, è quindi

$$|\dot{A}| = \frac{1}{2}|x||\dot{x}| \sin \theta$$

da cui:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x \times \dot{x}) = \frac{L}{2\mu} = \text{cost.}$$

□

1.6 Terza Legge di Keplero

Se integriamo la velocità areolare su un periodo otteniamo l'area dell'ellissi, quindi se i suoi semiassi sono lunghi $a > b$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \dot{A} dt &= ab\pi \\ \int_0^\tau \frac{|L|}{2\mu} dt &= a^2\pi \sqrt{1 - |e|^2} \\ \frac{|c|}{2}\tau &= a^2\pi \sqrt{-\frac{2E|c|^2}{k^2\mu}} \\ \tau &= 2\pi a^2 \sqrt{-\frac{2E}{k^2\mu}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che l'area dell'ellissi è $A = ab\pi$ e la (1.1) del paragrafo 1.4. Ci resta da calcolare E , per farlo ci conviene scrivere x in coordinate polari:

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I.$$

Segue che

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{r}|^2 + \frac{|L|^2}{2\mu|r|^2} - \frac{k\mu}{|r|},$$

imponendo $\dot{r} = 0$ otteniamo l'equazione in $|r|$:

$$|r|^2 + \frac{k\mu}{E}|r| - \frac{|L|^2}{2\mu E} = 0,$$

risolvendola otteniamo

$$|r_{1,2}| = -\frac{k\mu}{2E} \pm \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{4E^2} + \frac{|L|^2}{2\mu E}} = -\frac{k\mu}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E|L|^2}{k^2\mu^3}} \right).$$

Ricordando ora che in un'ellisse

$$a = \frac{1}{2}(|r_1| + |r_2|)$$

si trovano

$$a = -\frac{k\mu}{2E}, \quad E = -\frac{k\mu}{2a}.$$

Sostituendo quest'ultima nella formula ricavata per τ si ottiene

$$\tau = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{k}}$$

che prende il nome di *Terza Legge di Keplero*.

Nel caso del problema dei due corpi abbiamo $k = G(m_1 + m_2)$ e quindi:

$$\tau = a^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}.$$

1.7 Orbite non Newtoniane

In questo paragrafo considereremo il movimento di un corpo in un campo centrale più generico, procederemo scrivendo le equazioni differenziali del moto in coordinate polari e vedremo come questo fornirà una dimostrazione alternativa della *Prima Legge di Keplero*.

Consideriamo un campo di forze centrali arbitrario di equazione

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (1.2)$$

con $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $x = x(t)$ e $t \in I$ sia una soluzione. Esprimiamola in coordinate polari rispetto a $0_{\mathbb{R}^2}$

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I.$$

Derivando quest'ultima e sostituendo si ottiene:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - f(r))(\cos \theta, \sin \theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(-\sin \theta, \cos \theta) = (0, 0).$$

Visto che i vettori $(\cos \theta, \sin \theta)$ e $(-\sin \theta, \cos \theta)$ sono linearmente indipendenti, in quanto entrambi unitari e ortogonali, ci si riconduce al sistema:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per r si nota che

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Abbiamo così ottenuto, che durante il moto di una particella sotto l'azione di un campo di forze centrali, il momento angolare di quest'ultima si conserva. Il moto in questione può essere rettilineo, quindi il momento angolare (per unità di massa) c è uguale a 0, oppure possiamo scegliere il nostro sistema di riferimento affinché $\dot{\theta} > 0$. In ogni caso

$$r^2\dot{\theta} \equiv |c|, \quad |c| \geq 0.$$

Possiamo quindi concludere che le soluzioni $x(t)$ di (1.2), che giacciono su una semiretta passante per l'origine o girano in senso antiorario, possono ottenersi dal sistema:

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{|c|^2}{r^3} = f(r) \\ \dot{\theta} = \frac{|c|}{r^2}. \end{cases}$$

Fissando $|c|$ possiamo risolvere la seconda equazione

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{|c|}{r(s)^2} ds, \quad t \in I.$$

Osservazione 1.7.1. $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (visto che anche $t_0 \in I$) è fisso però arbitrario, questo fatto è dovuto all'invarianza per rotazione delle soluzioni.

Passiamo ora alla risoluzione della prima equazione, le soluzioni più semplici di questa sono senza dubbio quelle costanti, sia $r(t) \equiv R \in \mathbb{R}^+$ allora vale

$$-\frac{|c|^2}{R^3} = f(R) \Leftrightarrow |c| = \sqrt{-R^3 f(R)} \Leftrightarrow f(R) \leq 0,$$

ossia nel caso in cui il campo è attrattivo a distanza R .

Quando $f(R) < 0$ si ottiene una soluzione circolare del problema originario:

$$r(t) \equiv R, \quad \dot{\theta} = \frac{|c|}{R^2} = \sqrt{\frac{-f(R)}{R}} =: \omega$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t, \quad x(t) = R(\cos(\theta_0 + \omega t), \sin(\theta_0 + \omega t)).$$

Nel caso in cui $f(R) = 0$ il campo centrale sarà nullo a una distanza R dal centro per cui la particella non risentirà di alcuna attrazione e sarà ferma.

Operiamo ora un cambio di variabile per risolvere

$$\ddot{r} = f(r) + \frac{|c|^2}{r^3}, \quad r > 0; \tag{1.3}$$

vogliamo sostituire la variabile indipendente t con α e l'incognita $r = r(t)$ con $\rho(\alpha) = 1/r(t)$.

Osserviamo infatti che $\dot{\theta} = |c|/r^2 > 0$, perciò $\theta : I \rightarrow J := \theta(I)$ è un diffeomorfismo tra il suo dominio e la sua immagine (due aperti). Allora tramite l'inversa $\theta^{-1} : J \rightarrow I$, possiamo esprimere t in funzione di $\alpha = \theta(t) \in J$:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho : J & \rightarrow & I & \rightarrow &]0, +\infty[& \rightarrow &]0, +\infty[\\ \alpha & \mapsto & t & \mapsto & r(t) & \mapsto & 1/r(t) =: \rho(\alpha). \end{array}$$

Concludiamo che ρ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2(J)$ che soddisfa

$$r(t) = \frac{1}{\rho(\theta(t))} \quad t \in I.$$

Derivando otteniamo

$$\dot{r}(t) = -\frac{\dot{\theta}}{\rho(\theta(t))^2} \frac{d\rho}{d\theta}(\alpha) = -r^2 \dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta}(\alpha) = -|c| \frac{d\rho}{d\theta}(\alpha),$$

e derivando ancora

$$\ddot{r}(t) = -|c| \dot{\theta} \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\alpha) = -|c| r^2 \dot{\theta} \rho(\theta(t))^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\alpha) = -|c|^2 \rho(\theta(t))^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\alpha),$$

e infine sostituendo nella (1.3) ricaviamo:

$$-|c|^2 \rho(\theta(t))^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\alpha) = f\left(\frac{1}{\rho(\alpha)}\right) + |c|^2 \rho(\alpha)^3.$$

Osservazione 1.7.2. Le funzioni sono valutate sopra l'applicazione $\alpha = \theta(t)$.

Riscriviamo quest'ultima per semplificare la notazione:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = -\frac{1}{|c|^2 \rho^2} f\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (1.4)$$

Ci sono ora due possibili scelte per f che ci portano alla risoluzione di un'equazione lineare:

- $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ dove $k > 0$ (campo gravitazionale Newtoniano).

In questo caso l'equazione (1.4) diventa l'equazione di un oscillatore armonico forzato,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k}{|c|^2},$$

le cui soluzioni sono della forma:

$$\rho(\theta) = \frac{k}{|c|^2} + A \cos(\theta - \omega), \quad A \geq 0, \quad \omega \in [0, 2\pi[,$$

e quindi

$$r = \frac{1}{k/|c|^2 + A \cos(\theta - \omega)} = \frac{|c|^2/k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)},$$

dove $\varepsilon = |c|^2 A/k \geq 0$.

Abbiamo quindi la *Prima Legge di Keplero*: se $c \neq 0$ la particella si muove in una conica di *eccentricità* ε .

- $f(r) = -\frac{k}{r^3}$ dove $k > 0$ (forza cubica).

In questo caso la (1.4) diventa l'equazione di un oscillatore armonico:

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k}{|c|^2}\right) \rho = 0.$$

Conviene ora distinguere diversi casi a seconda del momento angolare $L = |c|/\mu$.

a) $|c|^2 = k$, segue

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\theta) = k_1 + k_2 \theta, \quad k_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Si ha

$$r = \frac{1}{k_1 + k_2 \theta},$$

quindi se ad esempio si ha $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ otteniamo una soluzione circolare di raggio 1.

Mentre se $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$ la traiettoria è spiraliforme.

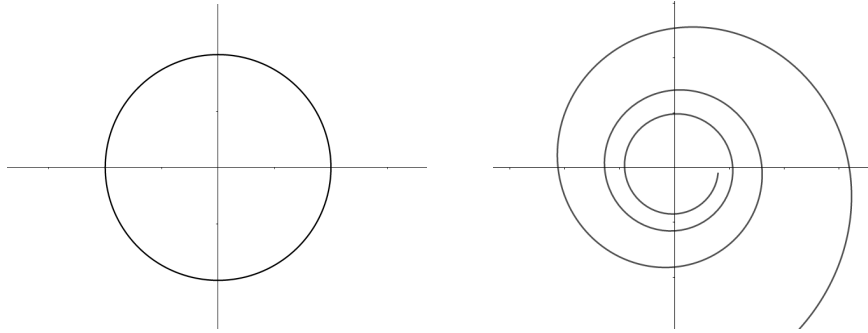


Figura 1.2: Grafici per $r = 1$ e $r = 1/\theta$

Osservazione 1.7.3. Perché sia soddisfatta la seconda legge di Keplero la velocità di percorrenza dell'orbita nel primo caso sarà costante, mentre nel secondo sarà maggiore vicino all'origine e minore allontanandosene.

b) $|c|^2 > k$.

Definiamo $\omega := \sqrt{1 - \frac{k}{|c|^2}} \in]0, 1[$. Allora,

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \omega^2 \rho = 0,$$

quindi,

$$\rho(\theta) = A \cos(\omega\theta + \phi), \quad r = \frac{1}{A \cos(\omega\theta + \phi)},$$

dove $A > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

Per esempio, con $A = 1$, $\phi = 0$, $\omega = 1/2$ si ha

$$r = \frac{1}{\cos(\theta/2)}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

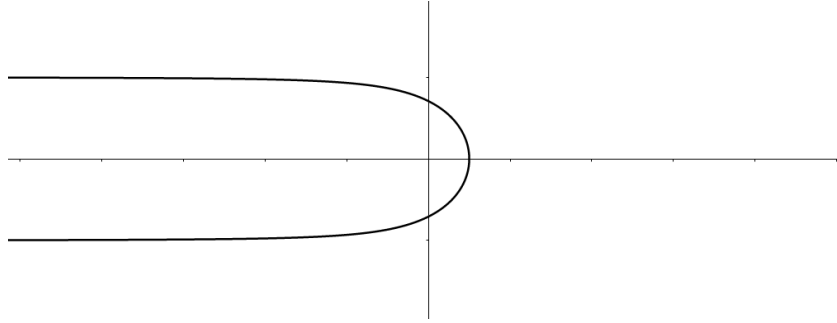


Figura 1.3: Grafico per $r = \frac{1}{\cos(\theta/2)}$

c) $|c|^2 < k$.

Definiamo $\omega := \sqrt{\frac{k}{|c|^2} - 1} \in]0, +\infty[$. L'equazione (3) diventa

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} - \omega^2 \rho = 0,$$

e le soluzioni sono

$$\rho(\theta) = k_1 e^{\omega\theta} + k_2 e^{-\omega\theta} \Rightarrow r = \frac{1}{k_1 e^{\omega\theta} + k_2 e^{-\omega\theta}}.$$

Per esempio con $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ e $\omega = 1$ otteniamo $r = e^{-\theta}$ (spirale logaritmica); mentre per $k_1 = k_2 = 1/2$ abbiamo $r = 1/\cosh \theta$.

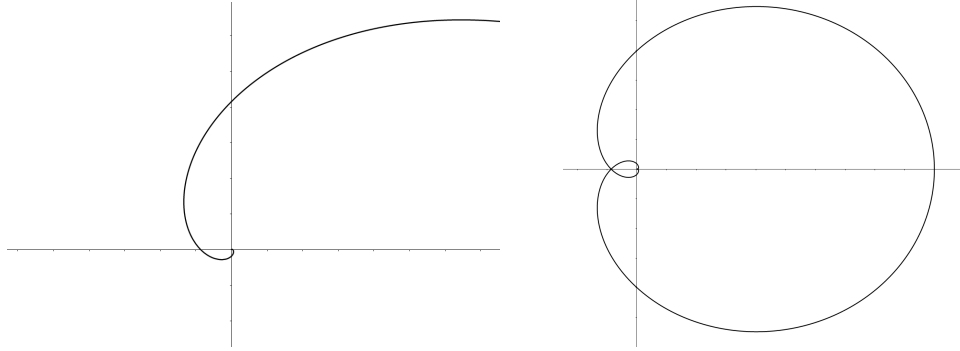


Figura 1.4: A sinistra il grafico per $r = e^{-\theta}$, a destra quello per $r = 1/\cosh \theta$

1.8 Legge oraria e l'equazione di Keplero

Abbiamo dato una descrizione del problema dei due corpi, si è visto che è riconducibile al moto di un'unica particella di massa μ in un campo centrale Newtoniano e si è data una descrizione delle possibili orbite percorribili.

Resta ora da trovare la *soluzione* del problema di Keplero, ossia una legge oraria che determini la posizione del corpo nello spazio (ci concentreremo sulle orbite ellittiche) in un certo istante.

Il primo passo è quello di dare una diversa e più utile parametrizzazione dell'ellisse.

Definizione 1.8.1. Dato un punto P dell'ellisse $\mathcal{E}$, la sua *anomia reale* è l'angolo f compreso tra l'occhio di eccentricità e il vettore $\overrightarrow{OP}$.

Osserviamo che l'ellissi può essere parametrizzata mediante la sua anomia reale, l'argomento del pericentro è $\omega = 0$ e quindi

$$\gamma(f) := \frac{h}{1 + \varepsilon \cos f} (\cos f, \sin f), \quad f \in \mathbb{R}, h > 0,$$

è una parametrizzazione 2π -periodica dell'ellissi.

Possiamo tuttavia trovare un'ulteriore espressione più semplice e utile. Tracciamo la circonferenza $\mathcal{C}'$ avente lo stesso centro C di $\mathcal{E}$ e di raggio il semiasse maggiore a . Proiettiamo ciascun punto $P \in \mathcal{E}$ trovando il corrispondente $P' \in \mathcal{C}'$ (vedi figura 1.5).

Definizione 1.8.2. Dato un punto P dell'ellisse $\mathcal{E}$, la sua *anomia eccentrica* è l'angolo u compreso tra l'occhio di eccentricità e il vettore $\overrightarrow{CP'}$.

Possiamo ottenere u da f componendo la traslazione T e l'omotetia L , $T, L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove

$$T(x, y) := (x + d, y), \quad d = \varepsilon a$$

$$L(x, y) := \left(x, \frac{a}{b}y\right),$$

infatti $L \circ T$ trasforma $\mathcal{E}$ in una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio a .

Allora siccome

$$u \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos u, a \sin u),$$

è una parametrizzazione 2π -periodica di $\mathcal{C}$ e $\Gamma := (L \circ T)^{-1}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali,

$$u \in \mathbb{R} \mapsto (L \circ T)^{-1}(a \cos u, a \sin u) = (a \cos u - d, b \sin u),$$

è una parametrizzazione 2π -periodica di $\mathcal{E}$. Sappiamo che $d = \varepsilon a$, in quanto semi-distanza focale, e $b = \sqrt{1 - \varepsilon^2}a$ quindi finalmente abbiamo:

$$\Gamma(u) = a(\cos u - \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Torniamo ora al nostro problema

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Supponiamo che la traiettoria percorra l'ellisse $\mathcal{E}$, sia $y := (L \circ T)(x)$ una curva di classe $\mathcal{C}^\infty$ che si muove nella circonferenza $\mathcal{C}$. Allora scrivendola in coordinate polari, per una certa funzione $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$y(t) = a(\cos u(t), \sin u(t)).$$

Sostituendo si ha

$$x(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

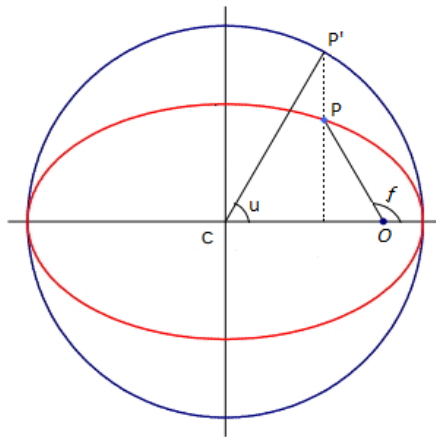


Figura 1.5: Anomalia reale f e eccentrica u

Siano $x_{1,2}(t)$ le componenti di $x(t)$, imponendo la conservazione del momento angolare abbiamo

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = |c|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo con l'espressione di $x(t)$ si ha

$$|c| = a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \dot{u}(t) \left[(\cos u(t) - \varepsilon) \cos u(t) + \sin^2 u(t) \right],$$

che è un'equazione differenziale di prim'ordine per l'anomalia eccentrica $u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{|c|}{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos u)}. \quad (1.5)$$

Si noti che $\varepsilon \in [0, 1[$, $|\dot{A}| = |c|/2$ e per la terza legge di Keplero:

$$|\dot{A}|\tau = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k}},$$

allora $|c| = \sqrt{ka(1 - \varepsilon^2)}$ e quindi $\dot{u} \geq \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}(1 + \varepsilon)} > 0$.

Segue che $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un diffeomorfismo e perciò esiste un unico t_0 tale che $u(t_0) = 0$.

Integrando la (1.5) tra t_0 e t :

$$\begin{aligned} u(t) - \varepsilon \sin u(t) &= \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}} (t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ t(u) &= t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}} \left[u(t) - \varepsilon \sin u(t) \right], \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ora possiamo determinare l'istante in cui il nostro pianeta passa per un determinato punto P dell'ellisse.

Possiamo anche ricavare la formula della *terza legge di Keplero*, infatti:

$$\tau = t(2\pi) - t(0) = \left[t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}} 2\pi \right] - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}} 2\pi.$$

Siamo quindi giunti a un sistema di equazioni che descrive i movimenti ellittici in un campo gravitazionale Newtoniano, quando gli assi cartesiani coincidono con quelli dell'ellisse:

$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon) \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u(t) \\ u(t) - \varepsilon \sin u(t) = \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Per determinare la posizione del nostro pianeta nell'istante t dobbiamo calcolare $u(t)$, ossia risolvere l'*equazione di Keplero*:

$$u - \varepsilon \sin u = \zeta, \quad (1.7)$$

dove $\zeta = \frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)$. Denotiamo $f_\varepsilon(u) = u - \varepsilon \sin u$ e K_ε la sua inversa. Vediamo che f_ε soddisfa

$$f_\varepsilon(u + 2\pi) = f_\varepsilon(u) + 2\pi, \quad f_\varepsilon(-u) = -f_\varepsilon(u),$$

perciò anche

$$K_\varepsilon(\zeta + 2\pi) = K_\varepsilon(\zeta) + 2\pi, \quad K_\varepsilon(-\zeta) = -K_\varepsilon(\zeta).$$

Si ha quindi che anche $h(\zeta) := K_\varepsilon(\zeta) - \zeta$ è 2π -periodica e dispari, cerchiamo quindi il suo sviluppo in serie di Fourier. Siccome la funzione $h(\zeta)$ è dispari possiamo scrivere

$$h(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

dove

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(\zeta) \sin(n\zeta) d\zeta;$$

integrando per parti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (K_\varepsilon(\zeta) - \zeta) \sin(n\zeta) d\zeta \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(K_\varepsilon(\zeta) - \zeta) \cos(n\zeta)}{n} \right]_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (K'_\varepsilon(\zeta) - 1) \cos(n\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Siccome $K_\varepsilon(0) = 0$ e $K_\varepsilon(\pi) = \pi$ il primo membro si annulla, inoltre dalla definizione di $K_\varepsilon := f_\varepsilon^{-1}$ abbiamo

$$K_\varepsilon(\zeta) - \varepsilon \sin K_\varepsilon(\zeta) = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

derivando si ottiene che

$$K'_\varepsilon = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)}.$$

Notando infine che $\int_0^\pi \cos(n\zeta) d\zeta = 0$, si ricava

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi K'_\varepsilon(\zeta) \cos(n\zeta) d\zeta = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\zeta)}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)} d\zeta. \quad (1.8)$$

Definizione 1.8.3. Dato un numero naturale $n \geq 1$, la *funzione di Bessel* di indice n si può definire attraverso la formula:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \sin u) du.$$

Osserviamo che possiamo riscrivere la (1.8) cambiando la variabile

$$u = K_\varepsilon(\zeta), \quad du = K'_\varepsilon(\zeta)d\zeta = \frac{d\zeta}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)},$$

allora

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos[n(u - \varepsilon \sin u)] du = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon).$$

La soluzione dell'equazione di Keplero è dunque la serie:

$$K_\varepsilon(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin(n\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo così una forma equivalente per la (1.6) ossia:

$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon) \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u(t) \\ u(t) = \nu(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin(n\nu(t - t_0)), \end{cases} \quad (1.9)$$

dove $\nu = \sqrt{k}/a^{3/2}$.

Capitolo 2

Il problema dei tre corpi

Dopo aver studiato e risolto il problema dei due corpi, sorge spontaneo chiedersi come si comporti il sistema nel caso venga aggiunto un terzo corpo.

Anche in questo caso l'enunciato del problema è facilmente esprimibile: *tre particelle si muovono nello spazio sotto la loro reciproca attrazione gravitazionale; date le loro condizioni iniziali, si determini il loro moto successivo.* La soluzione di tale quesito, come spesso in matematica, non rispecchia la semplicità del suo enunciato. Infatti a differenza del caso di uno o due particelle, il problema dei tre corpi non può essere risolto in una forma chiusa mediante l'utilizzo di funzioni elementari.

Una “soluzione” matematica del problema fu trovata da Karl Sundman nel 1912, egli trovò una serie di potenze che converge per ogni valore di tempo. Tuttavia tale soluzione non dà informazioni qualitative sul comportamento del sistema e la convergenza della serie è così lenta da non mostrarne nessuna applicazione pratica.

L'interesse verso questo problema è quindi ancora vivo e legato, oltre alla stabilità del sistema solare, anche ai notevoli sviluppi che il suo studio ha apportato in differenti campi, come quello della teoria dei sistemi dinamici.

Sono molto studiati anche dei casi particolari del problema, sia per interessi teorici che applicativi; tra i vari casi vi è il *problema ristretto dei tre corpi* in cui una delle tre masse orbitanti, detta *planetoide*, è supposta trascurabile rispetto alle altre.

Di quest'ultimo si possono distinguere quattro casi a seconda che l'orbita del planetoido sia complanare rispetto a quella degli altri due corpi e in base anche alla forma di questa: circolare o ellittica.

In questo capitolo sarà esposto il caso *piano*, in cui le tre orbite saranno complanari, e *circolare*.

2.1 Il problema circolare ristretto

Supponiamo di avere due corpi di massa $m_1 \geq m_2$, detti *primari*, e un terzo di massa m_3 trascurabile, chiamato *planetoide*; siano infine $r_{1,2,3}$ le loro posizioni nello spazio.

Le equazioni differenziali nel problema dei tre corpi sono:

$$\ddot{r}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{G m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel nostro caso, facendo tendere m_3 a zero abbiamo:

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 = \frac{G m_2}{|r_2 - r_1|^3} (r_2 - r_1), & \ddot{r}_2 = \frac{G m_1}{|r_1 - r_2|^3} (r_1 - r_2) \\ \ddot{r}_3 = \frac{G m_1}{|r_1 - r_3|^3} (r_1 - r_3) + \frac{G m_2}{|r_2 - r_3|^3} (r_2 - r_3), \end{cases} \quad (2.1)$$

Il sistema per i primari non dipende da r_3 ed è un problema dei due corpi. Supporremo che $r_1(t)$ e $r_2(t)$ siano soluzioni periodiche conosciute e prenderemo come riferimento quello con origine nel loro centro di massa e piano XY coincidente con quello della loro orbita. Notiamo poi che l'equazione differenziale rispetto al terzo corpo non è autonoma.

Per semplicità ci si concentrerà sul problema *ristretto circolare e piano*, ossia supporremo che le orbite dei primari siano circolari e che l'orbita del planetoide sia complanare a quella degli altri due corpi.

Si potrà quindi scrivere

$$r_1(t) = R[\omega t]P_1, \quad r_2(t) = R[\omega t]P_2$$

dove

$$R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad P_1 = r_1(0), \quad P_2 = r_2(0) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.2)$$

Possiamo ora fare un cambio di scala modificando il valore di G e ponendo unitaria la massa del sistema:

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu, \quad \mu \in \left] 0, \frac{1}{2} \right],$$

dove il numero μ è detto *parametro del sistema*. In più visto che il centro di massa è nell'origine si ha:

$$(1 - \mu)P_1 + \mu P_2 = 0,$$

non è infine restrittivo supporre che P_1 e P_2 giacciono nell'asse delle ascisse.

Si ha che la distanza tra i due corpi è costante e pari a

$$|r_1(t) - r_2(t)| = |R[\theta]||P_1 - P_2| = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = (-\mu, 0), \quad P_2 = (1 - \mu, 0).$$

Cambiando la scala temporale affinché $\tau = 2\pi$ si ottiene $|\omega| = 1$, non è inoltre restrittivo supporre che il verso della rotazione sia antiorario.

Siccome $r_{1,2}$ devono risolvere il problema dei due corpi, dalla terza legge di Keplero, si ha facilmente che $G = 1$, quindi l'ultima equazione della (2.1) diventa:

$$\ddot{r}_3 = \frac{1 - \mu}{|R[t]P_1 - r_3|^3}(|R[t]P_1 - r_3|) + \frac{\mu}{|R[t]P_2 - r_3|^3}(R[t]P_2 - r_3) \quad (2.3)$$

Proviamo a semplificare quest'equazione introducendo un sistema di riferimento per r_3 che giri con i primari, cambiando quindi la variabile con $r_3 = R[t]z$. Derivando $R[t]$ abbiamo

$$\frac{d}{dt}R[t] = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = R[t]J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivando ancora

$$\frac{d^2}{dt^2}R[t] = \frac{d}{dt}R[t]J = R[t]J^2 = -R[t].$$

Abbiamo quindi

$$\ddot{r}_3 = \left(\frac{d}{dt}R[t]\right)z + 2\left(\frac{d}{dt}R[t]\right)\dot{z} + R[t]\ddot{z} = R[t](\ddot{z} + 2J\dot{z} - z)$$

che sostituita in (2.3) da

$$\ddot{z} + 2J\dot{z} = z + \frac{1 - \mu}{|P_1 - z|^3}(P_1 - z) + \frac{\mu}{|P_2 - z|^3}(P_2 - z), \quad (2.4)$$

con $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$.

Si osservi che in questo sistema di riferimento l'equazione differenziale è diventata autonoma, al prezzo di introdurre una nuova variabile (z). I termini alla destra della (2.4) si possono vedere come il gradiente della funzione¹

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1 - \mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu).$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema (2.4) come

$$\ddot{z} + 2J\dot{z} = \nabla\Phi(z). \quad (2.5)$$

¹Il termine noto è una costante tradizionale.

2.2 I cinque punti di equilibrio di Lagrange

Ora si può finalmente procedere con lo studio delle proprietà principali di questo sistema, mostreremo l'esistenza di alcuni punti del piano XY in cui l'attrazione dei due primari sul planetoido gli consente di mantenere un'orbita stabile rispetto ad essi.

Definizione 2.2.1. Data una soluzione della (2.4), $z = z(t)$, definiamo la *Costante di Jacobi*, come

$$\mathcal{J} = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2.$$

Osserviamo che questa quantità è appunto costante infatti:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = 2\langle \nabla \Phi(z), \dot{z} \rangle - 2\langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle = 4\langle J\dot{z}, \dot{z} \rangle = 0.$$

Iniziamo con cercare le soluzioni costanti del sistema (2.5) che saranno i punti critici di Φ ossia le soluzioni di $\nabla \Phi(z) = 0$, o equivalentemente:

$$z = \frac{1-\mu}{|P_1-z|^3}(z-P_1) + \frac{\mu}{|P_2-z|^3}(z-P_2).$$

Per essere più sintetici scriviamo $\rho_1 = |z-P_1|$, $\rho_2 = |z-P_2|$ ottenendo:

$$\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)z = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}P_1 - \frac{\mu}{\rho_2^3}P_2.$$

Osserviamo che l'espressione alla destra si trova sull'asse delle ascisse, mentre quella alla sinistra sulla retta generata da z , distinguiamo i due casi in cui z e $(1, 0)$ sono rispettivamente dipendenti e indipendenti.

$z = (\alpha, 0)$ si trova sull'asse delle ascisse.

Ricordando che $P_1 = (-\mu, 0)$ e $P_2 = (1-\mu, 0)$, abbiamo

$$\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\alpha = -\frac{(1-\mu)\mu}{\rho_1^3} - \frac{(1-\mu)\mu}{\rho_2^3}.$$

Dopo qualche passaggio e avendo $\rho_1 = |\alpha + \mu|$, $\rho_2 = |\alpha + \mu - 1|$:

$$\alpha - (1-\mu) \frac{\alpha + \mu}{|\alpha + \mu|^3} - \mu \frac{\alpha + \mu - 1}{|\alpha + \mu - 1|^3} = 0. \quad (2.6)$$

Si osservi che l'equazione nella variabile α è definita su tre intervalli disgiunti

$$]-\infty, -\mu[, \quad]-\mu, 1-\mu[, \quad]1-\mu, +\infty[.$$

Vediamo ora che in ciascuno di questi c'è un'unica soluzione:

- $\alpha \in]-\infty, -\mu[$.

In quest'intervallo $|\alpha + \mu| = -\alpha - \mu$ e $|\alpha + \mu - 1| = 1 - \alpha - \mu$; definiamo la funzione $f :]-\infty, -\mu[\rightarrow \mathbb{R}$ in modo che

$$\alpha \mapsto \alpha + (1 - \mu) \frac{1}{(-\alpha - \mu)^2} + \mu \frac{1}{(1 - \alpha - \mu)^2}.$$

Poiché f è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} f(\alpha) = -\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\mu} f(\alpha) = +\infty,$$

allora $f(\alpha) = 0$ ha un'unica soluzione α_1 in $]-\infty, -\mu[$. Nel sistema di riferimento iniziale $L_1 = (\alpha_1, 0)$ si trasforma in una soluzione periodica.

- Il caso $\alpha \in]1 - \mu, +\infty[$ si tratta in maniera analoga. In questo intervallo la (2.6) diventa

$$\alpha - (1 - \mu) \frac{\alpha + \mu}{(\alpha + \mu)^3} - \mu \frac{\alpha + \mu - 1}{(\alpha + \mu - 1)^3} = 0,$$

che ha una sola soluzione $\alpha_2 \in]1 - \mu, +\infty[$, quindi $L_2 = (\alpha_2, 0)$.

- Passiamo ora all'intervallo $]-\mu, 1 - \mu[$. In questo caso la (2.6) si riscrive come

$$f :]-\mu, 1 - \mu[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \alpha - (1 - \mu) \frac{1}{(\alpha + \mu)^2} + \mu \frac{1}{(1 - \alpha - \mu)^2}.$$

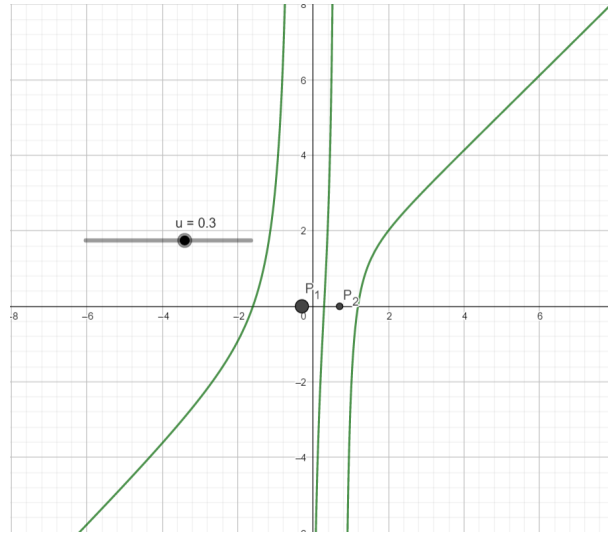


Figura 2.1: Grafico della funzione f associata all'equazione (2.6)

Dato che $f' > 0$ nell'intervallo considerato e $f(\cdot) - \mu, 1 - \mu(\cdot) = \mathbb{R}$ di nuovo abbiamo un'unica soluzione α_3 nell'intervallo e quindi $L_3 = (\alpha_3, 0)$.

Supponiamo finalmente che z e $(1, 0)$ siano indipendenti ossia z non si trovi sull'asse orizzontale. Come abbiamo già osservato, dall'equazione di partenza

$$\left(1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)z = -\frac{1 - \mu}{\rho_1^3}P_1 - \frac{\mu}{\rho_2^3}P_2$$

possiamo ricavare un sistema di due equazioni, in virtù dell'indipendenza dei due vettori sopra citati. Otteniamo

$$\begin{cases} 1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} = 0 \\ \frac{(1 - \mu)\mu}{\rho_1^3} - \frac{(1 - \mu)\mu}{\rho_2^3} = 0, \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ricava $\rho_1 = \rho_2 =: \rho > 0$ e dalla prima

$$1 - \frac{1 - \mu}{\rho^3} - \frac{\mu}{\rho^3} = 0 \implies \rho = 1.$$

Troviamo che $|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$: i tre punti formano un triangolo equilatero. Ci sono dunque due possibilità L_4 e L_5 .

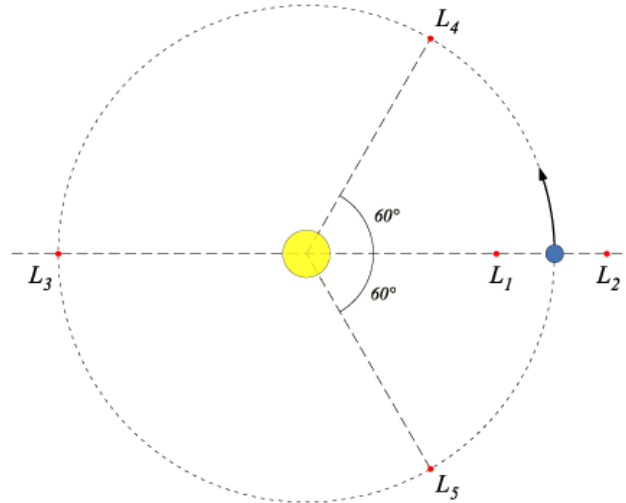


Figura 2.2: I cinque punti di Lagrange nel caso in cui i due primari sono il Sole e la Terra.

Capitolo 3

Accenno al caso generale: il problema degli n corpi

Dopo aver visto che nel problema ristretto dei tre corpi ci siano dei punti fissi rispetto a un sistema di riferimento rotante, è interessante studiare se ci possano essere delle soluzioni di equilibrio rispetto a un sistema di riferimento fisso.

Vedremo come tali soluzioni non esistono e che questo fatto, tanto importate quanto intuitivo, può essere generalizzato anche nel caso di n corpi che si attraggono mutualmente.

Dimostreremo infine il Teorema di Sundman e dedurremo che il sistema solare non può aver avuto origine dall'esplosione di un unico corpo celeste.

3.1 Descrizione del problema

Studiamo ora il problema di determinare le traiettorie di n corpi mossi dal potenziale gravitazionale da loro generato. Descriviamo la posizione di ciascun corpo con una funzione vettoriale

$$r_i : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Applicando la seconda legge di Newton otteniamo,

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}.$$

Tuttavia poiché due corpi non possono occupare la stessa posizione, dobbiamo escludere gli insiemi di collisione

$$i < j \quad \Delta_{ij} := \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n} : r_i = r_j\}$$

Ogni insieme Δ_{ij} è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3n}$ di dimensione $3(n-1)$. Posto ora

$$\Delta := \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

si osserva che è unione di un numero finito di sottospazi e pertanto è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^{3n}$; da questo segue che $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ è aperto.

Le soluzioni al problema degli n corpi bisognerà cercarle tra le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$r : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \quad r = (r_1, \dots, r_n),$$

che soddisfano

$$\mathfrak{M}\ddot{r} = F(r), \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n I_3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che il campo di forze $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ è conservativo e in virtù di questo esiste $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $F = -\nabla U$.

La funzione U è detta *potenziale Newtoniano* ed è data da

$$U(r_1, \dots, r_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{|r_i - r_j|}, \quad (r_1, \dots, r_n) \in \Omega.$$

Definiamo l'*energia cinetica* di una soluzione $(r_1, \dots, r_n)$ come

$$K(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i(t)|^2.$$

Si ha allora che l'*energia totale* della soluzione r è data da

$$E = K(t) + U(r(t)),$$

vediamo che questa quantità si conserva poiché

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \langle \ddot{r}_i, \dot{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial U}{\partial r_i}, \dot{r}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle m_i \ddot{r}_i + \frac{\partial U}{\partial r_i}, \dot{r}_i \right\rangle = 0.$$

Vediamo ora che oltre all'energia meccanica, nel caso generale di n corpi si conserva anche il momento angolare L definito come

$$L := \sum_{i=1}^n m_i (r_i \times \dot{r}_i),$$

dove $r = (r_1, \dots, r_n)$ è una soluzione al problema di n corpi di massa $m_1, \dots, m_n$.

Possiamo considerare $L = L(t)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, proviamo che è indipendente dal tempo:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{r}_i \times \dot{r}_i + r_i \times \ddot{r}_i).$$

Inoltre si ha che $\dot{r}_i \times \dot{r}_i$ e

$$r_i \times (m_i \times \ddot{r}_i) = r_i \times \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \right) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \times r_j,$$

perciò

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \times r_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \times r_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \times r_j.$$

Notiamo infine che i termini delle due sommatorie si cancellano a due a due per l'antisimmetria del prodotto vettoriale quindi $\frac{dL}{dt} = 0$, tuttavia va fatto notare che questo non implica che il movimento sia piano per $n \geq 3$.

Dimostriamo ora un semplice ma importante risultato che verrà utilizzato in seguito:

Proposizione 3.1.1. (*Identità di Lagrange-Jacobi*)

Sia $r = (r_1, \dots, r_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ una soluzione del problema degli n corpi, allora vale

$$\ddot{I} = 2E - U(r) \quad (3.1)$$

dove E, U sono rispettivamente l'energia meccanica e potenziale totali e I il suo momento di inerzia definito come:

$$I(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2, \quad t \in J.$$

Dimostrazione. Derivando due volte I si ricava

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i, \dot{r}_i \rangle, \quad \ddot{I} = \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i|^2 + \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i, \ddot{r}_i \rangle.$$

Infine, ricordando $m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}(r)$ e com'è definita l'energia cinetica $K(t)$, abbiamo

$$\ddot{I} = 2K(t) - \sum_{i=1}^n \left\langle r_i, \frac{\partial U}{\partial r_i}(r) \right\rangle = 2K(t) + U(r) = 2E - U(r).$$

□

3.2 Punti di equilibrio

Osservazione 3.2.1. Dato che nel dominio Ω vale la seguente implicazione:

$$r \in \Omega, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda r \in \Omega,$$

segue che possiamo calcolare $U(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n)$. Si conclude che il potenziale Newtoniano $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gode della seguente proprietà:

$$U(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n) = \lambda^{-1} U(r_1, \dots, r_n).$$

Un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}^d$ che soddisfa questa caratteristica è detto *cono*.

Definizione 3.2.2. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *omogenea di grado p* , con $p \in \mathbb{R}$, se Ω è un cono e se vale

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x), \quad x \in \Omega, \quad \lambda > 0.$$

Teorema 3.2.3 (di Eulero per le funzioni omogenee). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un cono aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e omogenea di grado p . Allora*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = p f(x) \quad x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \Omega$ e consideriamo la seguente funzione di classe $\mathcal{C}^1$:

$$\lambda \in]0, +\infty[\mapsto f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

Derivando (rispetto a λ) entrambe le espressioni si ricava

$$\langle \nabla f(\lambda x), x \rangle = p \lambda^{p-1} f(x)$$

per concludere basta porre $\lambda = 1$. □

Utilizziamo ora il risultato precedente per mostrare che il problema degli n corpi non ha equilibri, si noti infatti che U soddisfa le ipotesi del teorema e $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ è un cono aperto. Ragionando per assurdo se r fosse una soluzione di equilibrio costante sarebbe

$$\ddot{r} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial U}{\partial r_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \nabla U(r) = 0.$$

Da questo segue banalmente che $\langle \nabla U(r), r \rangle = 0$, ma questo è in contraddizione col teorema secondo cui vale:

$$\langle \nabla U(r), r \rangle = -U(r) \neq 0.$$

3.3 Collasso totale

Sia $r = (r_1, \dots, r_n)$ una soluzione al problema degli n corpi definita sopra un intervallo massimale $] \alpha, \omega[$. Supponiamo inoltre che il centro di massa sia fissato nell'origine.

Osservazione 3.3.1. Il moto del centro di massa è rettilineo uniforme rispetto a un riferimento inerziale, infatti basta porre

$$\mathcal{C}(t) := \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i(t) \quad t \in] \alpha, \omega[,$$

dove $M = m_1 + \dots + m_n$ è la massa totale del sistema, e verificare che:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{C}}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i(t) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} = 0. \end{aligned}$$

Definizione 3.3.2. Diciamo che la soluzione termina con un *collasso totale* se esiste un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r_i(t) = \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si nota subito che ξ debba essere il centro di massa e si può provare inoltre che il collasso totale deve avvenire in un tempo finito. Quando $t \rightarrow \omega$ si ha infatti che

$$\begin{cases} U(r(t)) = -G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|r_i(t) - r_j(t)|} \rightarrow -\infty, \\ I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

D'altra parte dalla prima equazione e dalla (3.1) deduciamo che, dato che $\lim_{t \rightarrow \omega} \ddot{I}(t) = +\infty$, esiste $t_0 < \omega$ tale che

$$\ddot{I}(t) \geq 1 \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Integrando due volte otteniamo

$$I(t) \geq I(t_0) + \dot{I}(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)^2/2, \quad t_0 \leq t \leq w.$$

Se per assurdo $w = +\infty$ dalla disuguaglianza ricaviamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty$ in contrasto con quanto trovato in precedenza.

Vediamo ora un paio di risultati che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema di Sundman sul collasso totale.

Lemma 3.3.3 (Disuguaglianza di Sundman). *Sia $r = (r_1, \dots, r_n)$ una soluzione del problema degli n corpi. Allora*

$$|L|^2 \leq 4I(\ddot{I} - E).$$

Dimostrazione. Il momento angolare è definito come

$$L = \sum_{i=1}^n m_i (r_i \times \dot{r}_i),$$

dalla disuguaglianza triangolare e le proprietà del prodotto vettoriale abbiamo quindi

$$|L| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i \times \dot{r}_i| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i| |\dot{r}_i| = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} |r_i|)(\sqrt{m_i} |\dot{r}_i|).$$

Utilizzando infine la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|L| \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i |r_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (2I)^{\frac{1}{2}} (2K)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4IK},$$

dove K è l'energia cinetica totale.

Dall'identità di Lagrange-Jacobi ricaviamo che $\ddot{I} = K + E$ che sostituita nella precedente disuguaglianza da

$$|L|^2 \leq 4I(\ddot{I} - E).$$

□

Lemma 3.3.4. *Sia $\varphi \in \mathcal{C}^2[t_0, \omega[$ una funzione che soddisfa*

$$\varphi(t) > 0, \quad \dot{\varphi}(t) < 0, \quad \ddot{\varphi}(t) \geq \alpha + \frac{\beta}{\varphi(t)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Allora

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 - \alpha \varphi(t) - \beta \log \varphi(t) \leq T, \quad t \in [t_0, \omega[,$$

dove $T = \dot{\varphi}(t_0)^2/2 - \alpha \varphi(t_0) - \beta \log \varphi(t_0)$.

Dimostrazione. Sia $\Phi \in \mathcal{C}^1[t_0, \omega[$ tale che $\Phi(t) := \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 - \alpha \varphi(t) - \beta \log \varphi(t)$, che è ben definita per ipotesi. Si osservi che

$$\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\varphi}(t) \left(\ddot{\varphi}(t) - \alpha - \frac{\beta}{\varphi(t)} \right) \leq 0 \quad t \in [t_0, \omega[,$$

perciò Φ è debolmente decrescente in $[t_0, \omega[$ e da ciò segue la tesi. □

Teorema 3.3.5 (Sundman). *Sia $r = (r_1, \dots, r_n)$ una soluzione del problema degli n corpi con il centro di massa fisso nell'origine e una collisione totale. Allora il suo momento angolare è $L = 0$.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Sundman osserviamo che

$$\ddot{I} \geq E + \frac{|L|^2}{4I}.$$

Siccome $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = 0$, nel caso in cui $L \neq 0$ si avrebbe $\ddot{I}(t) \rightarrow +\infty$. Perciò

$$\exists t_0 : \ddot{I}(t) > 0, \quad t \in [t_0, \omega[,$$

e dato che $I > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = 0$ si ha $\dot{I}(t) < 0$ in $[t_0, \omega[$. Siamo quindi nelle ipotesi del Lemma 3.3.4, applicandolo si ha

$$\frac{1}{2}\dot{I}(t)^2 - E I(t) - \frac{|L|^2}{4} \log I(t) \leq T \quad t \in [t_0, \omega[,$$

con $T = \dot{I}(t_0)^2/2 - E I(t_0) - |L|^2/4 \log I(t_0) \in \mathbb{R}$.

Ma ciò è assurdo poiché se $t \rightarrow \omega$, $I(t) \rightarrow 0$ e quindi $|L|^2 \log I(t) \rightarrow -\infty$. □

Osservazione 3.3.6. Siccome il sistema degli n corpi è reversibile il caso di collasso finale è analogo a quello di un'esplosione iniziale.

Da ciò possiamo dedurre che, nel caso in cui la teoria del *Big Bang* sia corretta, l'Universo ha un momento angolare nullo. Analogamente, siccome il momento angolare del Sistema Solare è chiaramente diverso da zero (ruota intorno alla nostra galassia), il Teorema di Sundman ci porta a concludere che esso non può aver avuto origine dall'esplosione di un unico corpo celeste.

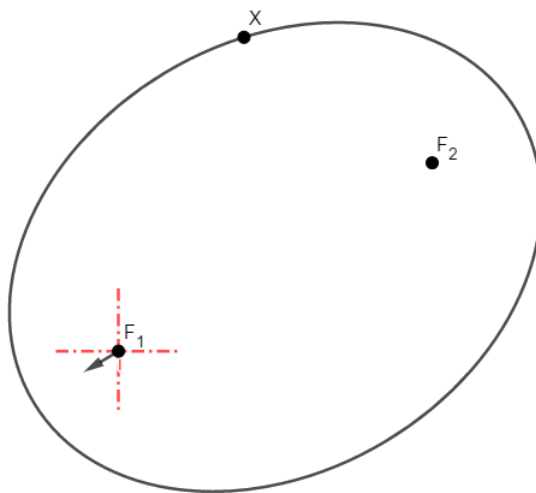
Appendice A

Geometria

A.1 Equazione cartesiana di una conica

È risaputo che le coniche del piano possono essere descritte come l'insieme degli zeri $p(x, y) = 0$ di un polinomio di secondo grado $p \in \mathbb{P}_2[x, y]$. In questa sezione ci interessa mostrare l'equazione cartesiana e polare di una ellisse con fuoco nell'origine di $\mathbb{R}^2$.

Definizione A.1.1. Viene detta *ellisse* l'insieme dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissati, detti *fuochi*, è costante.



Sia P un punto di coordinate x sulla curva e siano d_1 , d_2 le distanze di P dai fuochi, dove $d_1 + d_2 = c > 0$, $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$|x| + |F_2 - x| = c, \quad |F_2 - c| = c - |x|,$$

$$|F_2 - c|^2 = (c - |x|)^2, \quad |F_2|^2 + |x|^2 - 2\langle F_2, x \rangle = c^2 + |x|^2 - 2c|x|,$$

$$|x| + \left\langle -\frac{1}{c}F_2, x \right\rangle = \frac{c^2 - |F_2|^2}{2c}$$

Definiamo l'*occhio di eccentricità* $e := -\frac{1}{c}F_2$, e $k = \frac{c^2 - |F_2|^2}{2c}$. Notiamo che per la disuguaglianza triangolare

$$|F_2| > |x| + |F_2 - x| = c,$$

e deduciamo che $|e| < 1$ e $k > 0$. Tralasciando i facili conti per il caso dell'iperbole e della parabola, ricaviamo in ogni caso un'equazione del tipo

$$|x| + \langle x, e \rangle = k, \quad e \in \mathbb{R}^2, \quad k > 0, \quad (\text{A.1})$$

che descrive:

- un'ellissi con fuoco nell'origine se $|e| < 1$,
- un ramo di iperbole col fuoco più vicino nell'origine se $|e| > 1$,
- una parabola con fuoco nell'origine se $|e| = 1$.

Inoltre $\varepsilon := |e|$ è detta *eccentricità* della conica.

A.2 Equazione di una conica in coordinate polari

Scriviamo l'occhio di eccentricità in coordinate polari rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$:

$$e = \varepsilon(\cos \omega, \sin \omega),$$

dove l'argomento $\omega \in \mathbb{R}$ è definito, eccetto che nel caso circolare ($\varepsilon = 0$), a meno di un multiplo intero di 2π . Sia $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, in coordinate polari $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$, che sostituito nella (A.1) ci da:

$$r + r\varepsilon\langle(\cos \theta, \sin \theta), (\cos \omega, \sin \omega)\rangle = k,$$

ossia

$$r \left[1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega) \right] = k.$$

Siccome $k > 0$, un punto $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$ appartiene alla conica se e solo se

$$(i) \quad 1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega) > 0, \quad (ii) \quad r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}.$$

Nel caso dell'ellisse, $0 \leq \varepsilon < 1$ e la (i) è sempre verificata, perciò l'applicazione:

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)} (\cos \theta, \sin \theta),$$

è una parametrizzazione (2π -periodica) dell'ellisse.

Da questa parametrizzazione possiamo ricavare l'espressione di diversi elementi geometrici dell'ellisse. Ad esempio (si veda la figura sotto) il semiasse maggiore è

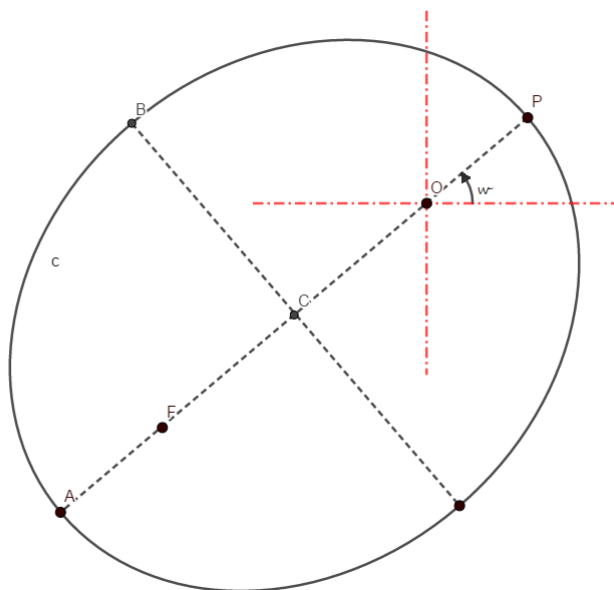
$$a = \frac{|P - A|}{2} = \frac{|P - 0| + |0 - A|}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{1 + \varepsilon} + \frac{k}{1 - \varepsilon} \right) = \frac{k}{1 - \varepsilon^2}.$$

D'altra parte

$$|C - 0| = a - |P - 0| = \frac{k}{1 - \varepsilon^2} - \frac{k}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon k}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \frac{|C - 0|}{a} = \varepsilon.$$

Infine possiamo calcolare il semiasse minore b con il teorema di Pitagora ottenendo:

$$b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} a.$$



Appendice B

Analisi Matematica

B.1 Sviluppo in serie di Fourier

Richiamiamo qui un risultato relativo allo sviluppo di una funzione in serie di Fourier la cui dimostrazione esula dallo scopo di questo elaborato.

Teorema B.1.1. *Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π , continua e con derivata continua a tratti. Allora*

$$h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) dx,$$

e per gli $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \sin(nx) dx.$$

Inoltre la convergenza della serie è assoluta e uniforme in $\mathbb{R}$.

Notiamo inoltre che

- $h(x)$ dispari $\Rightarrow h(x) \cos(nx)$ dispari $\Rightarrow a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- $h(x)$ pari $\Rightarrow h(x) \sin(nx)$ dispari $\Rightarrow b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

- [1] J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, AMS and LMS, 1996
- [2] G. De Marco, *Analisi II - Secondo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli, 1993
- [3] D. Halliday, R. Resnik, J. Walker, *Fondamenti di Fisica-VII Edizione*, Casa Editrice Ambrosiana, 2015
- [4] R. Ortega, A. Ureña, *Mecánica Celeste*, Editorial Universidad de Granada, 2010